На правах рукописи

СМИРНОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ТОЧКАМИ И МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2009

Работа выполнена на кафедре математики Воронежской государственной лесотехнической академии

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **Курина Галина Алексеевна**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор **Дмитриев Михаил Геннадьевич**;

кандидат физико-математических наук,
доцент **Поляков Андрей Евгеньевич**

Ведущая организация: **Дальневосточный государственный университет**

Защита состоится 16 декабря 2009 г. в 15^{10} на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, математический факультет, ауд. 314.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан 13 ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н., доцент Провоторов В. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория оптимальных разрывных систем стала интенсивно развиваться в 1960-е годы в связи с практическими потребностями и общим интересом к проблемам управления. Термин "разрывная система"служит собирательным наименованием большого класса моделей (составных, сложных, многоэтапных, с промежуточными условиями и т.д.). В терминах разрывных систем формулируются многие содержательные инженерно-технические задачи, связанные, например, с движением летательных аппаратов в анизотропных средах, распространением сейсмических колебаний, работой вибромашин и вибротранспортеров, протеканием ударных и взрывных процессов, управлением манипуляторами, функционированием противоаварийной автоматики электроэнергетических систем. Разрывные системы широко используются в экономике, химической технологии, теории автоматического регулирования, теории систем с переменной структурой и других областях науки. В монографии Ащепкова Л. Т. "Оптимальное управление разрывными системами"(Новосибирск: Наука, 1987) основное внимание сконцентрировано на проблеме необходимых и достаточных условий оптимальности управления и их применении для решения практических задач. Для различных классов задач оптимального управления разрывными системами условия оптимальности управления получены при помощи разных методов также в работах Захарова Г. К. (1981), Бердышева Ю. И.(1987), Чоу И. (Zhou Y.), Эгэстэда М. (Egerstedt M.), Мартина К. (Martin C.) (2005), Дмитрука А. В., Кагановича А. М. (2008). Интерес к разрывным системам не угасает до сих пор (см., например, недавно изданные монографии Либерзона Д. (Liberzon D.) (2003) и Бойко И. (Boiko I.) (2008), в которых исследуются проблемы устойчивости таких систем).

В настоящее время, когда точные методы анализа почти исчерпаны, приближенные аналитические и асимптотические методы исследования математических моделей стали неотъемлемой частью теории математического моделирования, позволяя выписывать приближенные решения достаточно сложных возмущенных задач, если известны решения соответствующих (обычно более простых) невозмущенных задач.

Возмущения в задачах оптимального управления могут быть связаны как с постановкой задач (малые постоянные времени, моменты инерции, массы, большие коэффициенты усиления и т.п.), так и с методами исследования задач управления (параметры штрафа, регуляризации, аппроксимации импульсов и др.). Использование асимптотических методов часто позволяет значительно упростить исходную математическую модель, например, пренебречь нелинейностями, произвести декомпозицию исходной задачи на задачи меньшей размерности.

В подавляющем большинстве работ, посвященных задачам оптимального управления с малым параметром, асимптотический анализ решений производится на основе асимптотики решения краевых задач, вытекающих из условий оптимальности управления (см., например, обзоры Кокотовича П. В. (Kokotovic P. V.), О'Мэлли Р. Е. (O'Malley R. E. Jr.), Саннути П. (Sannuti P.) (1976), Васильевой А. Б., Дмитриева М. Г. (1982), Саксены В. Р. (Saksena V. R.), О'Рэлли Дж. (O'Reilly J.), Кокотовича П. В. (Kokotovic P. V.) (1984), Куриной Г. А. (1992), Нэйди Д. С. (Naidu D. S.) (2002), Дмитриева М. Г., Куриной Г. А. (2006)).

Второй путь построения асимптотики решения задач с малым параметром, названный в работах Белокопытова С. В. и Дмитриева М. Г. (1986, 1989) прямой схемой, заключается в непосредственной подстановке в условия задачи постулируемого асимптотического разложения решения и определении серии задач для нахождения коэффициентов асимптотики. Существенным преимуществом прямой схемы является возможность доказать невозрастание значений минимизируемого функционала при использовании нового приближения оптимального управления и для нахождения членов асимптотического разложения использовать вычислительно - программные комплексы для решения задач оптимального управления. Для построения первого приближения решении задач управления нелинейными слабоуправляемыми системами этот подход использовался Черноусько Ф. Л. (1968) при наличии ограничений на управление и Моисеевым Н. Н. ("Асимптотические методы нелинейной механики", М.: Наука, 1981) в случае отсутствия ограничений на управление. Существенное развитие прямая схема получила в работах Белокопытова С. В. и Дмитриева М. Г. (1986, 1989), в которых исследовались сингулярно возмущенные задачи оптимального управления в случае отсутствия ограничений на управление. Обзор работ, посвященных применению прямой схемы в различных задачах, приведен в статье Дмитриева М. Г., Куриной Г. А. (Сингулярные возмущения в задачах управления. Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. — С. 3–51).

Цель работы. Основной целью настоящей диссертационной работы является построение асимптотических решений следующих задач оптимального управления:

– линейно-квадратичная задача оптимального управления с промежуточными точками и малым параметром в критерии качества;

– нелинейная задача оптимального управления с различной ценой слагаемых, зависящих от промежуточных точек;

– линейно-квадратичная задача оптимального управления с уравнением состояния, разрывным в промежуточной точке.

Методика исследований. Прямая схема построения асимптотического решения задач оптимального управления с малым параметром является основным методом в данной диссертационной работе. Также используются теория оптимального управления, классические методы дифференциального исчисления функций многих переменных и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Для вышеперечисленных трех типов задач оптимального управления получены следующие новые результаты: доказана однозначная разрешимость возмущенной задачи в окрестности решения вырожденной задачи; построено асимптотическое разложение решения по степеням малого параметра; получены оценки близости приближенного асимптотического решения к точному решению задачи по управлению, траектории и функционалу; доказано невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым последующим асимптотическим приближением оптимального управления.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть применены для асимптотического анализа конкретных математических моделей оптимального управления с малым параметром. Они также могут быть использованы в учебном процессе при чтении спецкурсов и в научных исследованиях.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях: семинары в ВГУ, ВГЛТА под руководством Куриной Г. А. (Воронеж, 2006–2009); Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения"(Воронеж, 2007, 2008); научные чтения Российского государственного социального университета (Руза, 2008, 2009); 19-я Крымская осенняя математическая школа-симпозиум "Спектральные и эволюционные задачи"(Симферополь, 2008); 47th IEEE Conference on Decision and Control (Канкун, 2008); международная конференция, посвященная 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего "Современные проблемы математики, механики и их приложений"(Москва, 2009); международная конференция "Complex Analysis & Dynamical Systems IV"(Нахария, 2009).

Публикации. Результаты, изложенные в диссертации, опубликованы в работах [1]–[14]. Работы [2], [4], [5], [9], [12], [14] написаны совместно с научным руководителем Куриной Г. А., которой принадлежат постановки задач и схемы доказательств некоторых теорем. Из совместных работ в диссертацию вошли только полученные автором результаты. Работы [1], [2] опубликованы в изданиях, соответствующих списку ВАК РФ для кандидатских диссертаций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка цитируемой литературы из 48 наименований. Общий объем диссертации - 122 стр. Изложение проиллюстрировано компьютерной графикой (13 рисунков), выполненной при помощи вычислительно - программного комплекса Maple.

Во введении представлен краткий обзор работ, относящихся к теме диссертации, и дано краткое описание диссертации по главам.

В первой главе проводится асимптотический анализ линейно - квадратичной задачи оптимального управления с промежуточными точками и малым параметром в критерии качества.

Несмотря на то, что условия оптимальности управления для задач с промежуточными точками в критерии качества изучались многими авторами (см., например, работы Ащепкова Л. Т., Дмитрука А. В. и Кагановича А. М., Матвеева А. С. и Якубовича В. А.), для полноты изложения в первом разделе выводятся необходимые и достаточные условия оптимальности управления в форме принципа максимума для задачи минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1}\left(\langle x(t_j) - \xi_j, F_j(x(t_j) - \xi_j)\rangle + 2\langle h_j, x(t_j)\rangle\right) + \int_0^T \left(\frac{1}{2}\left\langle \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \right.\right.$$
$$\left.\left.\begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S(t)^* & R(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} d(t) \\ q(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}\right\rangle\right) dt \qquad (1)$$

на траекториях системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t), \quad x(0) = x^0. \qquad (2)$$

Здесь $t \in [0,T]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N < t_{N+1} = T$, значения t_j $(j = \overline{1, N+1})$ фиксированы, $x(t) \in X$, $u(t) \in U$; X, U – действительные конечномерные евклидовы пространства; $< \cdot, \cdot >$ означает скалярное произведение в соответствующих пространствах; звездочка сверху с обозначением оператора означает сопряженный оператор; $A(t), F_j, W(t) \in L(X)$; $B(t), S(t) \in L(U, X)$, $R(t) \in L(U)$; операторы F_j $(j = \overline{1, N+1})$, $W(t)$ и $R(t)$ симметрические, кроме того, операторы F_j и $\begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S(t)^* & R(t) \end{pmatrix}$ неотрицательно определены, а $R(t)$ положительно определен при всех $t \in [0,T]$, элементы $x^0 \in X$ и $\xi_j, h_j \in X$ $(j = \overline{1, N+1})$ заданы, операторы F_j не зависят от t, остальные операторы и функции $f(\cdot)$, $d(\cdot)$ со значениями в X, $q(\cdot)$ со значениями в U непрерывны по t. Как обычно, $L(Y)$ $(L(Y, Z))$ означает множество линейных ограниченных операторов, действующих в Y (из Y в Z).

Предполагается, что допустимые управления $u(\cdot)$ являются кусочно-непрерывными функциями на $[0,T]$. Под решением уравнения состояния в первых двух главах понимается непрерывная функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая почти всюду этому уравнению. Управление $u(\cdot)$ и рассматриваемая далее функция $\psi(\cdot)$, для определенности, считаются непрерывными справа в точках разрыва, в точках $t = 0$ и $t = T$ предполагается непрерывность справа и слева соответственно.

Приведем соответствующие теоремы (нумерация теорем та же, что и в диссертации).

Теорема 1.1.1 (Достаточное условие оптимальности управления). Управление $u_*(\cdot)$, задаваемое формулой

$$u_*(t) = R(t)^{-1}(B(t)^*\psi(t) - S(t)^*x_*(t) - q(t)), \tag{3}$$

где $\psi(\cdot)$ - решение задачи

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = W(t)x_*(t) - A(t)^*\psi(t) + S(t)u_*(t) + d(t), \quad t \neq t_j, \tag{4}$$

$$\psi(t_j - 0) - \psi(t_j + 0) = -F_j(x_*(t_j) - \xi_j) - h_j, \quad j = \overline{1,N}, \tag{5}$$

$$\psi(T) = -F_{N+1}(x_*(T) - \xi_{N+1}) - h_{N+1}, \tag{6}$$

$x_*(\cdot)$ - траектория системы (2), соответствующая управлению $u_*(\cdot)$, является оптимальным для задачи (1), (2).

Теорема 1.1.2 (Необходимое условие оптимальности управления). Оптимальное управление для задачи (1), (2) $u_*(\cdot)$ задается формулой (3), где $x_*(\cdot)$ - оптимальная траектория, а $\psi(\cdot)$ - решение системы (4)–(6).

Далее в этом разделе устанавливается

Теорема 1.1.3 Задача (1), (2) однозначно разрешима.

Затем, используя замену переменных, предложенную Данбу К. (1937), исходная задача (1), (2) преобразуется к задаче без промежуточных точек t_j, $j = \overline{1,N}$. Отметим, что при этом размерности переменных состояния и управления возрастают в $N+1$ раз и для переменной состояния вместо начального условия в задаче (1), (2) в преобразованной задаче получаем краевое условие.

В заключение первого раздела находится оптимальное управление в форме обратной связи и минимальное значение критерия качества для задачи (1), (2). А именно, доказана

Теорема 1.1.4 Пусть $K(\cdot)$ – решение задачи

$$\begin{gathered}\frac{dK(t)}{dt} = -K(t)A(t) - A(t)^*K(t) + \\ +(S(t) + K(t)B(t))R(t)^{-1}(S(t)^* + B(t)^*K(t)) - W(t), \quad t \neq t_j,\end{gathered} \tag{7}$$

$$K(t_j-0)-K(t_j+0)=F_j, \quad j=\overline{1,N}, \quad K(T)=F_{N+1}, \tag{8}$$

$\varphi(\cdot)$ – решение задачи

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(t)}{dt} &= -(A(t)-B(t)R(t)^{-1}(S(t)^*+B(t)^*K(t)))^*\varphi(t)- \\ &-K(t)f(t)+(S(t)+K(t)B(t))R(t)^{-1}q(t)-d(t), \quad t\neq t_j,\end{aligned} \tag{9}$$

$$\varphi(t_j+0)-\varphi(t_j-0)=F_j\xi_j-h_j,\ j=\overline{1,N},\ \varphi(T)=-F_{N+1}\xi_{N+1}+h_{N+1}, \tag{10}$$

$x_*(\cdot)$ – решение начальной задачи

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= (A(t)-B(t)R(t)^{-1}(S(t)^*+B(t)^*K(t)))x(t)- \\ &-B(t)R(t)^{-1}(B(t)^*\varphi(t)+q(t))+f(t), \quad x(0)=x^0.\end{aligned} \tag{11}$$

Тогда

$$u_*(t)=-R(t)^{-1}((S(t)^*+B(t)^*K(t))x_*(t)+B(t)^*\varphi(t)+q(t)) \tag{12}$$

является оптимальным управлением для задачи (1), (2) и минимальное значение критерия качества (1) равно

$$\begin{aligned}J(u_*) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N+1}\langle\xi_j,F_j\xi_j\rangle+\left\langle x^0,\varphi(0)+\frac{1}{2}K(0)x^0\right\rangle+\int_0^T\Big(\langle\varphi(t),f(t)\rangle- \\ &-\frac{1}{2}\left\langle B(t)^*\varphi(t)+q(t),R(t)^{-1}(B(t)^*\varphi(t)+q(t))\right\rangle\Big)\,dt.\end{aligned} \tag{13}$$

Во втором разделе первой главы при помощи прямой схемы строится асимптотическое разложение решения задачи P_ε, состоящей в минимизации функционала

$$\begin{aligned}J_\varepsilon(u) &= \frac{1}{2}\langle x(T)-\xi_{N+1},F_{N+1}(x(T)-\xi_{N+1})\rangle+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{N}\langle x(t_j)-\xi_j, \\ &F_j(x(t_j)-\xi_j)\rangle+\frac{1}{2}\int_0^T\left\langle\begin{pmatrix}x(t)\\u(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}W(t)&S(t)\\S(t)^*&R(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\u(t)\end{pmatrix}\right\rangle dt\end{aligned} \tag{14}$$

на траекториях системы

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t)+B(t)u(t)+f(t), \quad x(0)=x^0. \tag{15}$$

Здесь $\varepsilon>0$ - малый параметр.

Решение возмущенной задачи (14), (15) ищется в виде рядов

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j u_j(t), \quad x(t,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j x_j(t), \tag{16}$$

которые подставляются в условия (14), (15), затем в равенствах (15) производится приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε, а минимизируемый функционал (14) записывается в виде

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j J_j. \tag{17}$$

Пара функций (u_0, x_0) определяется из вырожденной задачи P_0, получаемой из (14), (15) при $\varepsilon = 0$.

Пара (u_k, x_k) при $k \geq 1$ определяется из следующей линейно - квадратичной задачи управления с промежуточными точками:

$$P_k : \widetilde{J}_k(u_k) = \frac{1}{2}\langle x_k(T), F_{N+1}x_k(T)\rangle + \sum_{j=1}^{N} \left\langle x_k(t_j), F_j(x_{k-1}(t_j) - \widetilde{\xi}_j^k)\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S(t)^* & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \right\rangle dt \to \min_{u_k}, \tag{18}$$

где $\widetilde{\xi}_j^k = \begin{cases} \xi_j, \text{ при } k = 1, \\ 0, \text{ при } k \geq 2, \end{cases}$

$$\frac{dx_k}{dt} = A(t)x_k + B(t)u_k, \quad x_k(0) = 0. \tag{19}$$

Возможность построения асимптотического разложения решения задачи (14), (15) в виде рядов (16), используя решения задач P_k, $k \geq 0$, а также оценки в нижеследующих теоремах 1.2.2, 1.2.3 обеспечиваются структурой коэффициентов в разложении (17), вытекающей из следующей теоремы.

Теорема 1.2.1 Коэффициент J_{2k-1} из разложения (17) является известной величиной после решения задачи P_{k-1}. Критерий качества $\widetilde{J}_k(u_k)$ в задаче P_k представляет собой преобразованное выражение для коэффициента J_{2k} $(k \geq 1)$.

Получены оценки близости точного решения задачи P_ε (u_*, x_*) к приближенному решению

$$\widetilde{u}_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j u_j(t), \quad \widetilde{x}_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j x_j(t). \tag{20}$$

Теорема 1.2.2 При всех $t \in [0, T]$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|u_*(t) - \widetilde{u}_n(t)\| \le c\varepsilon^{n+1}, \quad \|x_*(t) - \widetilde{x}_n(t)\| \le c\varepsilon^{n+1}, \\ J_\varepsilon(\widetilde{u}_n) - J_\varepsilon(u_*) \le c\varepsilon^{2(n+1)}, \tag{21}$$

где постоянная c не зависит от t и ε.

Из этой теоремы следует, что последовательность $\{\widetilde{u}_n(t)\}$ является минимизирующей для функционала (14).

Доказано невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым последующим асимптотическим приближением оптимального управления, т. е. справедлива

Теорема 1.2.3 При достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства

$$J_\varepsilon(\widetilde{u}_i) \le J_\varepsilon(\widetilde{u}_{i-1}), \quad i = \overline{1,n}. \tag{22}$$

При $u_i \ne 0$ в (22) неравенство строгое.

В третьем разделе первой главы для задачи (14), (15) строится асимптотическое разложение решения, используя вид оптимального управления в форме обратной связи. Для этой цели сначала строятся асимптотические разложения по целым неотрицательным степеням малого параметра ε решений нижеследующих задач (23), (24); (25), (26); (27), вытекающих из теоремы 1.1.4, примененной к задаче (14), (15).

$$\frac{dK(t)}{dt} = -K(t)A(t) - A(t)^*K(t) + \\ +(S(t) + K(t)B(t))R(t)^{-1}(S(t)^* + B(t)^*K(t)) - W(t), \quad t \ne t_j, \tag{23}$$

$$K(t_j - 0) - K(t_j + 0) = \varepsilon F_j, \quad j = \overline{1,N}, \quad K(T) = F_{N+1}; \tag{24}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -(A(t) - B(t)R(t)^{-1}(S(t)^* + B(t)^*K(t)))^*\varphi(t) - \\ -K(t)f(t), \quad t \ne t_j, \tag{25}$$

$$\varphi(t_j + 0) - \varphi(t_j - 0) = \varepsilon F_j\xi_j, \quad j = \overline{1,N}, \quad \varphi(T) = -F_{N+1}\xi_{N+1}; \tag{26}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A(t) - B(t)R(t)^{-1}(S(t)^* + B(t)^*K(t)))x(t) - \\ -B(t)R(t)^{-1}B(t)^*\varphi(t) + f(t), \quad x(0) = x^0. \tag{27}$$

Используя асимптотические разложения решений трех предыдущих задач:

$$K(t) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j K_j(t), \quad \varphi(t) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j\varphi_j(t), \quad x(t) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j x_j(t), \tag{28}$$

оптимальное в силу теоремы 1.1.4 управление

$$u_*(t) = -R(t)^{-1}((S(t)^* + B(t)^*K(t))x(t) + B(t)^*\varphi(t)) \tag{29}$$

представляется в виде

$$u_*(t) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j u_j(t). \tag{30}$$

Предположим, что найдены члены разложений (28), (30) до порядка n включительно, и введем обозначения

$$\begin{gathered}\widetilde{K}_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j K_j(t), \quad \widetilde{\varphi}_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j \varphi_j(t),\\ \widetilde{x}_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j x_j(t), \quad \widetilde{u}_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j u_j(t).\end{gathered} \tag{31}$$

Доказана

Теорема 1.3.1 Для решений задач (23), (24); (25), (26); (27) и оптимального управления $u_*(\cdot)$ для задачи (14), (15) можно построить разложения в ряд по целым неотрицательным степеням ε вида (28), (30), при этом остаточные члены $\Delta K = K - \widetilde{K}_n$, $\Delta\varphi = \varphi - \widetilde{\varphi}_n$, $\Delta x = x - \widetilde{x}_n$, $\Delta u = u_* - \widetilde{u}_n$ при $n \geq 1$ являются величинами порядка ε^{n+1}.

Обозначим через $\widehat{x}_n$ решение задачи (27) при $K = \widetilde{K}_n$, $\varphi = \widetilde{\varphi}_n$, т. е.

$$\begin{gathered}\frac{d\widehat{x}_n}{dt} = (A(t) - B(t)R(t)^{-1}(S(t)^* + B(t)^*\widetilde{K}_n(t)))\widehat{x}_n -\\ -B(t)R(t)^{-1}B(t)^*\widetilde{\varphi}_n(t) + f(t), \quad \widehat{x}_n(0) = x^0.\end{gathered} \tag{32}$$

Обозначим через $\widehat{u}_n$ правую часть выражения (29) при $x = \widehat{x}_n$, $K = \widetilde{K}_n$, $\varphi = \widetilde{\varphi}_n$, т. е.

$$\widehat{u}_n = -R(t)^{-1}((S(t)^* + B(t)^*\widetilde{K}_n(t))\widehat{x}_n + B(t)^*\widetilde{\varphi}_n(t)). \tag{33}$$

Теорема 1.3.2 Для оптимального управления $u_*(\cdot)$ в форме обратной связи (29) можно построить, используя асимптотические разложения решений задач (23), (24) и (25), (26), приближение $\widehat{u}_n$ вида (33), где $\widehat{x}_n$ является решением задачи (32) ($n \geq 1$). При этом для всех $t \in [0, T]$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{u}_n(t) - u_*(t)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad \|\widehat{x}_n(t) - x_*(t)\| \leq c\varepsilon^{n+1}, \quad J_\varepsilon(\widehat{u}_n) - J_\varepsilon(u_*) \leq c\varepsilon^{2(n+1)},$$

где $n \geq 1$, а постоянная c не зависит от t, ε.

Во второй главе при помощи прямой схемы строится асимптотическое разложение решения нелинейной задачи оптимального управления с различной ценой слагаемых, зависящих от промежуточных точек, следующего вида

$$P_\varepsilon : J_\varepsilon(u) = \sum_{j=1}^{N+1} \varepsilon^j G_j(x(t_j)) + \int_0^T F(x(t), u(t), t, \varepsilon)\, dt \to \min_u, \tag{34}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t, \varepsilon), \quad x(0) = x^0. \tag{35}$$

Здесь $t \in [0, T]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = T$, значения t_j ($j = \overline{1, N+1}$) фиксированы, $x(t) \in X$, $u(t) \in U$; X, U — действительные конечномерные евклидовы пространства; G_j, $j = \overline{1, N+1}$ и F — скалярные функции, f — функция со значениями в X, $\varepsilon \geq 0$ — малый параметр. Функции G_j, F, f предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам.

Коэффициенты ε^j в критерии качества введены для учета возможных неодинаковых требований по точности в различные моменты времени и для различных координат.

Предполагается, что выполнено следующее

Условие I. Вырожденная задача P_0, получающаяся из (34), (35) при $\varepsilon = 0$, имеет единственное решение $u = u_0(t)$, $x = x_0(t)$.

Из условия оптимальности управления для задач с промежуточными ограничениями следует, что для оптимального управления $u = u(t)$ задачи P_ε должно выполняться равенство

$$f_u^*(x, u, t, \varepsilon)\psi - F_u^*(x, u, t, \varepsilon) = 0, \tag{36}$$

где сопряженная переменная $\psi = \psi(t)$ является решением задачи

$$\frac{d\psi}{dt} = -f_x^*(x, u, t, \varepsilon)\psi + F_x^*(x, u, t, \varepsilon), \quad t \neq t_j, \tag{37}$$

$$\begin{gathered} \psi(t_j - 0) - \psi(t_j + 0) = -\varepsilon^j (G_j)_x^*(x(t_j)), \quad j = \overline{1, N}, \\ \psi(T) = -\varepsilon^{N+1}(G_{N+1})_x^*(x(T)) \end{gathered} \tag{38}$$

(см., например, статью: Дмитрук А. В., Каганович А. М. Принцип максимума для задач оптимального управления с промежуточными точками / Нелинейная динамика и управление. Вып. 6. — М: Физматлит, 2008. — С. 101–136).

Здесь знак переменной (x или u) в нижнем индексе означает дифференцирование по этой переменной.

Решение задачи (34), (35) ищется в виде рядов (16). Подставляя соотношения (16) в (34), после некоторых преобразований минимизируемый функционал записываем в виде ряда (17).

Пару (u_0, x_0) находим как решение вырожденной задачи P_0.

Пары функций (u_k, x_k) при $k \geq 1$ находятся из следующих линейно-квадратичных задач:

$$P_k : \widetilde{J}_k(u_k) = \sum_{j=1}^{N+1} [\widetilde{G}_{jx}]_{k-j} x_k(t_j) + \int_0^T \left(\frac{1}{2} \left\langle \left(\begin{array}{c} x_k \\ u_k \end{array} \right), \right. \right.$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S(t)^* & R(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} d_k(t) \\ q_k(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_k \\ u_k \end{pmatrix} \right\rangle dt \to \min_{u_k}, \qquad (39)$$

$$\frac{dx_k}{dt} = \overline{f}_x x_k + \overline{f}_u u_k + [\widetilde{f}]_k, \quad x_k(0) = 0. \qquad (40)$$

Здесь $\widetilde{G}_{jx} = (G_j)_x(\widetilde{x}_{k-1}(t_j))$, $[\widetilde{G}_{jx}]_{k-j} = 0$, если $k - j < 0$, $[h]_i$ обозначает коэффициент при ε^i в разложении функции h в ряд по целым неотрицательным степеням малого параметра ε, черта сверху означает, что значения функций вычисляются на вырожденном решении, волна сверху означает, что значения функций вычисляются при $x = \widetilde{x}_{k-1}(t)$, $u = \widetilde{u}_{k-1}(t)$, где $\widetilde{x}_{k-1}(t)$, $\widetilde{u}_{k-1}(t)$ задаются формулами (20) при $n = k - 1$, коэффициенты под интегралом в (39) зависят от решений u_i, x_i и сопряженных переменных ψ_i для задач P_i, $i < k$.

Предполагается, что для критерия качества (39) выполнено следующее

Условие II. Оператор $\begin{pmatrix} W(t) & S(t) \\ S(t)^* & R(t) \end{pmatrix}$ положительно определен при всех $t \in [0, T]$.

При условии II задачи P_k, $k \geq 1$, будут однозначно разрешимы.

Доказывается

Теорема 2.2.1 Задача для u_m, x_m, ψ_m, полученная из условий оптимальности управления для задачи P_m, совпадает с задачей для m−го приближения решения задачи (35)–(38), полученной из условий оптимальности управления в задаче P_ε, которое ищется в виде разложения по целым неотрицательным степеням ε.

Алгоритм для нахождения коэффициентов разложения (16) для задачи (34), (35) основан на следующей теореме.

Теорема 2.2.2 Коэффициент J_{2m-1} в разложении вида (17) известен после решения задач P_i ($i = \overline{0, m-1}, m \geq 1$), из которых находятся u_i, x_i. Преобразованное выражение для коэффициента J_{2m} после отбрасывания членов, известных после решения задач P_i ($i = \overline{0, m-1}, m \geq 1$), совпадает с критерием качества $\widetilde{J}_m(u_m)$ в задаче P_m.

Доказана однозначная разрешимость возмущенной задачи (34), (35) в окрестности решения вырожденной задачи, а также получены оценки близости приближенного решения (20) к точному решению задачи. В диссертации этот результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 2.2.3 При условиях I, II и достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (34), (35) однозначно разрешима в окрестности управления u_0 и для её решения (u_*, x_*) справедливы оценки (21).

Доказано невозрастание значений минимизируемого функционала с каждым последующим асимптотическим приближением оптимального управления (Теорема 2.2.4), т. е. при условиях I, II и достаточно малых $\varepsilon > 0$ для задачи (34), (35) имеют место неравенства (22).

В третьей главе рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}(\langle C_1x_1(t_1) - C_2x_2(t_1), F(C_1x_1(t_1) - C_2x_2(t_1))\rangle + \langle x_1(t_1) - \zeta, G(x_1(t_1) - \zeta)\rangle + \langle x_2(t_1) - \xi, H(x_2(t_1) - \xi)\rangle) + \langle g, x_1(t_1)\rangle + \langle h, x_2(t_1)\rangle + $$
$$+\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix} x_j(t) \\ u_j(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_j(t) & S_j(t) \\ S_j(t)^* & R_j(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_j(t) \\ u_j(t)\end{pmatrix}\right\rangle + \right.$$
$$\left. + \left\langle\begin{pmatrix} d_j(t) \\ q_j(t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_j(t) \\ u_j(t)\end{pmatrix}\right\rangle\right) dt \tag{41}$$

на траекториях системы

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = A_j(t)x_j(t) + B_j(t)u_j(t) + f_j(t), \quad t_{j-1} \le t \le t_j, \quad j = 1,2, \tag{42}$$

$$x_1(0) = x^0, \quad x_2(T) = x^T. \tag{43}$$

Здесь $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$, значения t_j $(j = 1,2)$ фиксированы; $x_j(t) \in X_j$, $u_j(t) \in U_j$, $A_j(t), W_j(t) \in L(X_j)$, $B_j(t), S_j(t) \in L(U_j, X_j)$, $R_j(t) \in L(U_j)$ при $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,2$; $C_1 \in L(X_1, Y)$, $C_2 \in L(X_2, Y)$, $F \in L(Y)$, $G \in L(X_1)$, $H \in L(X_2)$; X_j, U_j, Y - действительные конечномерные евклидовы пространства, вообще говоря, различной размерности; операторы F, G, H, $W_j(t)$ и $R_j(t)$ симметрические, кроме того, операторы F, G, H, $\begin{pmatrix} W_j(t) & S_j(t) \\ S_j(t)^* & R_j(t)\end{pmatrix}$ неотрицательно определены, а $R_j(t)$ положительно определены при всех $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1,2$, элементы $x^0 \in X_1$, $x^T \in X_2$ и $\zeta, g \in X_1$, $\xi, h \in X_2$ заданы, операторы F, G, H, C_1, C_2 не зависят от t, а остальные операторы и функции $f_j(\cdot), d_j(\cdot)$ со значениями в X_j, $q_j(\cdot)$ со значениями в U_j непрерывны по t.

Отметим, что в задаче (41)–(43) уравнение состояния представляет собой две системы с последовательными режимами функционирования на отрезках $[0, t_1]$ и $[t_1, T]$, где момент переключения t_1 с одной системы на другую фиксирован, условия стыковки отсутствуют, но минимизируемый функционал зависит от значений траектории в точках переключения слева и справа, что объединяет системы в одну. Уравнения (42) могут описывать на разных отрезках поведение объектов, вообще говоря, различной природы. Управление на разных отрезках также могут быть различного типа. В отличие от первых двух глав, здесь рассматриваются траектории уравнения состояния, разрывные в промежуточной точке.

Хотя необходимые условия оптимальности управления для задач рассматриваемого класса следуют, например, из упомянутой выше статьи Дмитрука А. В. и Кагановича А. М., для полноты изложения в первом разделе этой главы приводится непосредственный вывод необходимых и достаточных условий оптимальности управления для задачи (41)–(43). Также доказывается однозначная разрешимость этой задачи.

Во втором разделе третьей главы при помощи прямой схемы построения асимптотики решения задач оптимального управления находится асимптотическое решение для задачи P_ε, состоящей в минимизации функционала

$$J_\varepsilon(u_1,u_2)=\frac{1}{2}\left\langle C_1x_1(t_1)-C_2x_2(t_1),F(C_1x_1(t_1)-C_2x_2(t_1))\right\rangle+\varepsilon\Big(\frac{1}{2}(\langle x_1(t_1)-\zeta,$$

$$G(x_1(t_1)-\zeta)\rangle+\langle x_2(t_1)-\xi,H(x_2(t_1)-\xi)\rangle)+\langle g,x_1(t_1)\rangle+\langle h,x_2(t_1)\rangle\Big)+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left(\frac{1}{2}\left\langle\begin{pmatrix}x_j(t)\\u_j(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}W_j(t)&S_j(t)\\S_j(t)^*&R_j(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_j(t)\\u_j(t)\end{pmatrix}\right\rangle+\right.$$

$$\left.+\left\langle\begin{pmatrix}d_j(t)\\q_j(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_j(t)\\u_j(t)\end{pmatrix}\right\rangle\right)dt \tag{44}$$

на траекториях системы

$$\frac{dx_j(t)}{dt}=A_j(t)x_j(t)+B_j(t)u_j(t)+f_j(t),\quad t_{j-1}\le t\le t_j,\quad j=1,2, \tag{45}$$

$$x_1(0)=x^0,\quad x_2(T)=x^T. \tag{46}$$

Функции, составляющие решение возмущенной задачи (44)-(46), ищутся в виде рядов

$$u_j(t,\varepsilon)=\sum_{i\ge0}\varepsilon^i u_{ji}(t),\quad x_j(t,\varepsilon)=\sum_{i\ge0}\varepsilon^i x_{ji}(t),\quad j=1,2, \tag{47}$$

которые подставляются в условия (44)-(46), затем в равенствах (45), (46) производится приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε, а минимизируемый функционал (44) записывается в виде разложения (17).

Получены задачи оптимального управления, из которых можно найти члены разложений (47).

Пары функций (u_{j0},x_{j0}), $j=1,2$, находятся из вырожденной задачи P_0, получаемой из (44)–(46) при $\varepsilon=0$.

Пары функций (u_{jk},x_{jk}), $j=1,2$, при $k\ge1$ определяются как решение следующей задачи

$$P_k:\widetilde{J}_k(u_{1k},u_{2k})=\frac{1}{2}\left\langle C_1x_{1k}(t_1)-C_2x_{2k}(t_1),F(C_1x_{1k}(t_1)-C_2x_{2k}(t_1))\right\rangle+$$

$$+\left\langle x_{1k}(t_1), G(x_{1(k-1)}(t_1)-\widetilde{\zeta}_k)+\widetilde{g}_k\right\rangle+\left\langle x_{2k}(t_1), H(x_{2(k-1)}(t_1)-\widetilde{\xi}_k)+\widetilde{h}_k\right\rangle+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\left\langle\left(\begin{array}{c} x_{jk} \\ u_{jk}\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc} W_j & S_j \\ S_j^* & R_j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_{jk} \\ u_{jk}\end{array}\right)\right\rangle dt \to \min_{(u_{1k},u_{2k})}, \qquad (48)$$

где $\widetilde{\zeta}_k = \begin{cases} \zeta, \text{ при } k=1, \\ 0, \text{ при } k\geq 2, \end{cases}$ $\widetilde{g}_k = \begin{cases} g, \text{ при } k=1, \\ 0, \text{ при } k\geq 2, \end{cases}$ $\widetilde{\xi}_k = \begin{cases} \xi, \text{ при } k=1, \\ 0, \text{ при } k\geq 2, \end{cases}$
$\widetilde{h}_k = \begin{cases} h, \text{ при } k=1, \\ 0, \text{ при } k\geq 2, \end{cases}$

$$\frac{dx_{jk}}{dt} = A_j x_{jk} + B_j u_{jk}, \quad t_{j-1}\leq t\leq t_j, \quad j=1,2, \qquad (49)$$

$$x_{1k}(0)=0, \quad x_{2k}(T)=0. \qquad (50)$$

Алгоритм построения асимптотики основан на следующей теореме.

Теорема 3.2.1 Коэффициент J_{2k-1} из разложения (17) является известной величиной после решения задачи P_{k-1}. Критерий качества $\widetilde{J}_k(u_{1k},u_{2k})$ в задаче P_k представляет собой преобразованное выражение для коэффициента J_{2k} $(k\geq 1)$.

Предположим, что найдены решения задач P_k для $k=\overline{0,n}$ – пары функций (u_{jk},x_{jk}), $j=1,2$. Получены оценки близости приближенного решения

$$\widetilde{u}_{jn}(t)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k u_{jk}(t), \quad \widetilde{x}_{jn}(t)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k x_{jk}(t)$$

к точному решению (u_*,x_*) задачи P_ε ((44)-(46)).

Теорема 3.2.2 При всех $t\in[0,T]$ и достаточно малых $\varepsilon>0$ справедливы оценки

$$\|u_{j*}(t)-\widetilde{u}_{jn}(t)\|\leq c\varepsilon^{n+1}, \quad \|x_{j*}(t)-\widetilde{x}_{jn}(t)\|\leq c\varepsilon^{n+1}, \quad j=1,2,$$

$$J_\varepsilon(\widetilde{u}_{1n},\widetilde{u}_{2n})-J_\varepsilon(u_{1*},u_{2*})\leq c\varepsilon^{2(n+1)},$$

где постоянная c не зависит от t и ε.

Установлено, что при фиксированном ε последовательность $\{J_\varepsilon(\widetilde{u}_{1i},\widetilde{u}_{2i})\}$ невозрастающая, т. е. справедлива

Теорема 3.2.3 При достаточно малых $\varepsilon>0$ имеют место неравенства

$$J_\varepsilon(\widetilde{u}_{1i},\widetilde{u}_{2i})\leq J_\varepsilon(\widetilde{u}_{1(i-1)},\widetilde{u}_{2(i-1)}), \quad i=\overline{1,n}. \qquad (51)$$

При $u_{ji}\neq 0$, $j=1,2$, неравенство (51) строгое.

Во всех главах приведены результаты численных экспериментов.

Публикации по теме диссертации

[1] *Смирнова, Е. В.* Формализм построения асимптотики решения нелинейной задачи оптимального управления с промежуточными точками в критерии качества и малым параметром / Е. В. Смирнова // Вестник ВГТУ. Воронеж: ГОУВПО "Воронежский гос. тех. ун-т". — 2008. — Т. 4, № 11. — С. 94–97.

[2] *Курина, Г. А.* Асимптотическое решение некоторых задач оптимального управления с промежуточными точками в критерии качества и малым параметром / Г. А. Курина, Е. В. Смирнова // Современная математика. Фундаментальные направления. — Москва: РУДН, 2009. — Т. 34. — С. 63–99.

[3] *Смирнова, Е. В.* Об одной нестандартной периодической линейно-квадратичной задаче управления для дескрипторных систем / Е. В. Смирнова, И. С. Шацких // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции "Воронежская зимняя математическая школа". — Воронеж: ВорГУ, 2007. — С. 208–209.

[4] *Курина, Г. А.* Формализм построения асимптотики решения некоторой задачи управления с промежуточными точками / Г. А. Курина, Е. В. Смирнова // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XVIII". — Воронеж: ВорГУ, 2007. — С. 101–102.

[5] *Курина, Г. А.* Оптимальное управление в форме обратной связи для линейно-квадратичной задачи с промежуточными точками / Г. А. Курина, Е. В. Смирнова, И. Чоу (Y. Zhou) // Труды математического факультета: сборник научных трудов. Вып. 11 (новая серия); ВГУ. — Воронеж: Научная книга, 2007. — С. 121–127.

[6] *Смирнова, Е. В.* Асимптотика решения одной матрично сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с промежуточными точками / Е. В. Смирнова // "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2008". Тезисы докладов. — Воронеж: ВорГУ, 2008. — С. 128.

[7] *Смирнова, Е. В.* Формализм построения асимптотики решения одной задачи оптимального управления с уравнением состояния, разрывным в промежуточной точке / Е. В. Смирнова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XIX". — Воронеж: ВорГУ, 2008. — С. 200–201.

[8] *Смирнова, Е. В.* Асимптотика оптимального управления в форме обратной связи для одной задачи с промежуточными точками / Е. В. Смирнова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронеж-

ской весенней математической школы "Понтрягинские чтения-XIX". — Воронеж, 2008. — С. 199.

[9] *Kurina, G. A.* Asymptotic solution of linear-quadratic control problem with intermediate points and small parameter in performance index / G. A. Kurina, E. V. Smirnova // Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, Dec. 9–11, 2008. – P. 3688–3693.

[10] *Смирнова, Е. В.* Асимптотика решения одной нелинейной задачи оптимального управления с промежуточными точками и малым параметром в критерии качества / Е. В. Смирнова // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: материалы международной научной конференции. — Воронеж: ВорГУ, 2009. — С. 160–161.

[11] *Смирнова, Е. В.* Формализм построения асимптотики решения линейно - квадратичной периодической задачи с матричным сингулярным возмущением и промежуточными точками в критерии качества / Е. В. Смирнова // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: материалы международной научной конференции. — Воронеж: ВорГУ, 2009. — С. 161–162.

[12] *Курина, Г. А.* Асимптотика решения некоторых задач оптимального управления с промежуточными точками и малым параметром в критерии качества / Г. А. Курина, Е. В. Смирнова // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего. — М.: Издательство "Университетская книга", 2009. — С. 166.

[13] *Смирнова, Е. В.* Асимптотический анализ нелинейной задачи оптимального управления с различной ценой слагаемых, зависящих от промежуточных точек / Е. В. Смирнова // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XX". — Воронеж: ВорГУ, 2009. — С. 169–170.

[14] *Kurina, G. A.* Asymptotic solution of optimal control problems with intermediate points and small parameter in performance index / G. A. Kurina, E. V. Smirnova // Abstracts of lectures presented at the International Conference Complex Analysis & Dynamical Systems IV, May 18–22, 2009. —The Galilee Research Center for Applied Mathematics of ORT Braude College. – P. 24.

Работы [1], [2] опубликованы в изданиях из списка ВАК РФ.

Подписано в печать 12.11.2009 г.
Формат 60 x 84/16 . Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 1,0 Тираж 100 экз. Заказ № 2890

Отпечатано в типографии
Воронежский ЦНТИ – филиал ФГУ «Объединение
«Росинформресурс» Минэнерго России
394730, г. Воронеж, пр. Революции, 30