

На правах рукописи



Судакова Инга Анатольевна

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ
СОСТОЯНИЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН
И ОБОЛОЧЕК ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ
РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого
твёрдого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Тула – 2000

Работа выполнена в Тульском государственном университете

Научный руководитель – доктор техн. наук, профессор А.А. Трещев

Официальные оппоненты – доктор техн. наук, профессор Н.Д. Тутышкин

кандидат физ. – мат. наук, доцент С.И. Шелобасв

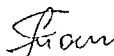
Ведущая организация – ГУП “КБ Приборостроения”

Защита состоится 27 декабря 2000 г. в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 063.47.07 при Тульском государственном университете по адресу: 300600, г. Тула, ГСП, пр. Ленина, 92, 9 учебный корпус, аудитория 101.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тульского государственного университета.

Автореферат разослан 22 ноября 2000 г..

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ. – мат. наук,
профессор



Л.А. Толоконников

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящее время в различных отраслях промышленности (машиностроении, ракетостроении, строительстве) многие элементы конструкций и детали машин изготавливают из анизотропных материалов, механические характеристики которых зависят от вида напряженного состояния. К таким материалам относятся некоторые марки конструкционных графитов, полимеры, композиты.

Разносопротивляемость анизотропных материалов проявляется уже на упругой стадии работы конструкции и во многом влияет на распределение напряжений. Существенные эффекты, связанные с явлением разносопротивляемости, обнаруживаются при сложном напряженно-деформированном состоянии.

Несмотря на сравнительно большое число предложенных моделей определяющих соотношений сред, чувствительных к виду напряженного состояния, прикладные исследования эффектов, вызванных разносопротивляемостью анизотропных материалов конструкций, сдерживаются наличием существенных недостатков известных моделей, недостаточным для решения данного класса задач развитием численных методов, а также недостаточной ориентацией известных моделей механики анизотропных разносопротивляющихся сред на их дальнейшее использование в приложениях.

Анизотропные разносопротивляющиеся материалы широко используются для изготовления таких элементов конструкций, как слоистые пластины и оболочки.

Расчеты трехслойных пластин показали, что их жесткость при поперечном сдвиге заметно зависит от механических свойств материалов и от толщины слоев, а пренебрежение деформациями поперечного сдвига при определении напряженного состояния приводит к большим ошибкам.

Таким образом, можно констатировать, что учет явления разносопротивляемости материалов при определении напряженно-деформированного состояния элементов конструкций является актуальной задачей, как в научном, так и в прикладном плане.

Кроме этого, актуальным является вопрос изучения влияния поперечного сдвига на напряженно-деформированное состояние указанных выше конструкций.

Целью представленной работы является построение в рамках подхода, связанного с нормированным пространством напряжений, обобщенной теории деформирования слоистых пластин и оболочек, составленных из анизотропных материалов, свойства которых зависят от вида напряженного состояния, а также решение ряда прикладных задач упругого деформирования пластин с учетом поперечного сдвига и тонких цилиндрических оболочек.

Новые научные результаты, которые выносятся на защиту:

- 1) предложенные определяющие соотношения для анизотропных материалов, сопротивляющиеся деформированию которых зависит от вида напряженного состояния;
- 2) соотношения, описывающие упругое деформирование трехслойных круглой, кольцевой и прямоугольной пластин средней толщины с учетом поперечного сдвига, выполненных из материалов с усложненными свойствами;
- 3) математическая модель деформирования трехслойной тонкой цилиндрической оболочки, составленной из анизотропных разносопротивляющихся материалов;
- 4) полученные результаты расчетов, выявляющие новые количественные эффекты напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин и цилиндрических оболочек; связанные с явлением разносопротивляемости анизотропных материалов и учетом конечной трансверсальной сдвиговой жесткости.

Достоверность представленных научных положений и выводов подтверждается получением теоретических результатов строгими математическими методами, основанными на фундаментальных положениях механики деформируемого твердого тела, приемлемым соответствием полученных результатов имеющимся экспериментальным данным, сравнением расчетных параметров с классическими и с результатами исследований на основе иных подходов.

Практическая ценность работы, проведенной в рамках государственной НИР № 40-95 "Актуальные задачи строительного проектирования", заключается в построении моделей анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных элементов конструкций, выполненных из материалов, поведение которых не описывается классическими теориями. Данные модели могут быть использованы как для проектных, так и для проверочных расчетов конструкций с разными уровнями точности.

Внедрение результатов работы осуществлено на ГУП "КБ Приборостроения" (г. Тула). Использование результатов работы подтверждено актом о внедрении.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались:

- на I-ой Международной конференции по проблемам экологии и безопасности жизнедеятельности (г. Тула, ТулГУ, 1997г.);
- на XXX-ой Всероссийской научно-технической конференции "Актуальные проблемы современного строительства" (г. Пенза, ПГАСА, 1999г.);
- на Всероссийской научно-практической конференции "Прикладная математика - 99" (г. Тула, ТулГУ, 1999г.);
- на Международной научно-технической конференции "Энергосбережение, экология и безопасность" (г. Тула, ТулГУ, 1999г.);
- на Международной конференции "Проблемы освоения подземного пространства" (г. Тула, ТулГУ, 2000г.);

- на Всероссийской научно-технической конференции "Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии" (г. Тула, ТулГУ, 2000г.);

- на семинаре по механике деформируемого твердого тела в ТулГУ под руководством д-ра физ.-мат. наук, проф. Маркина А.А. (г. Тула, октябрь 2000г.)

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 11 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка литературы, включающего 159 наименований, приложений и содержит 7 рисунков. Общий объем работы 135 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обоснование актуальности темы диссертации, поставлены цели и задачи диссертационной работы, сформулированы основные научные положения, которые выносятся на защиту, дана аннотация содержания диссертации.

В первом разделе приводится обзор основных направлений в моделировании свойств анизотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, а также в описании напряженно-деформированного состояния трехслойных пластин и оболочек.

По общим признакам выделены две группы моделей определяющих соотношений для материалов с усложненными свойствами.

Первую группу составляют модели, в основу которых положена зависимость механических характеристик материала от знаков возникающих напряжений или развивающихся деформаций. В рамках данной модели выделены определяющие соотношения, предложенные в работах С.А. Амбарцумяна, А.А. Хачатряна, М.С. Саркисяна, Р.М. Джонса, К.В. Берта, Ф. Тобаддора и других.

Вторая группа моделей определяет жесткость материалов в зависимости от непрерывных функций вида напряженного состояния, и базируется на работах Н.М. Матченко, А.А. Трещева, Е.В. Ломакина, А.А. Золочевского и других. В качестве функций, зависящих от вида напряженного состояния, указанные авторы использовали нормированные напряжения, отношение средних напряжений к интенсивности напряжений, эквивалентное напряжение.

Отмечено, что большинство известных определяющих соотношений для анизотропных разносопротивляющихся материалов имеют ряд недостатков, таких как

- неучет влияния сложных видов напряженного состояния при определении жесткости материала;
- привлечение к расчету кусочных и непотенциальных зависимостей;
- большое количество констант, входящих в определяющие соотношения;
- наличие ограничений, накладываемых на некоррелируемые константы материалов;
- узкая область устойчивости потенциалов деформаций или напряжений.

Анализируя известные исследования НДС трехслойных пластин и оболочек, можно сделать вывод о том, что теории, базирующиеся на гипотезах Тимошенко и Рейсснера, имеют ряд принципиальных преимуществ по сравнению с классическим подходом, основанным на теории Кирхгофа-Лява.

В диссертационной работе, в рамках теории Н.М. Матченко и А.А. Трещева, предложен новый подход к построению определяющих соотношений анизотропных разносопротивляющихся материалов, допускающих линейную аппроксимацию диаграмм растяжения, сжатия, свободных от кусочности и непотенциальности полученных зависимостей. Решен ряд задач упругого деформирования трехслойных пластин с учетом поперечного сдвига и цилиндрической оболочки из материалов с усложненными свойствами.

Во втором разделе предлагается вариант построения определяющих соотношений структурно анизотропных упругих материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. Предложенный подход основан на инвариантах тензора напряжений, связанных с нормированным пространством напряжений.

Напряженное состояние в точке анизотропного деформируемого тела в нормированном пространстве главных напряжений количественно предложено определить модулем вектора полного напряжения $S = \sqrt{\sigma_i \cdot \sigma_i}$, а качественно – косинусами направляющих углов $\alpha_i = \cos \beta_i$, которые связаны условием нормировки $\alpha_i \cdot \alpha_i = 1$, где $i = 1, 2, 3$.

Модуль вектора S можно рассматривать как норму векторного пространства главных напряжений, а направляющие косинусы α_i – как главные нормированные напряжения.

При переходе от главных осей к произвольной ортогональной системе координат получено

$$S = \sqrt{\sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij}}; \alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S; \alpha_{ij} \cdot \alpha_{ij} = 1. \quad (1)$$

На базе введенных количественной и качественных характеристик напряженного состояния в работах Н.М. Матченко, З.В. Арканья и А.А. Трещева определяющие соотношения для анизотропных разносопротивляющихся материалов было предложено формулировать в виде потенциала деформаций $W = A(\alpha_{ij})S^2$, где $A(\alpha_{ij})$ – степенной полином от нормированных напряжений α_{ij} , конкретизация которого производится в зависимости от вида структурной анизотропии.

В этих работах для удобства выполнения тензорных преобразований рекомендовано отойти от общепринятых обозначений напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij} , представив их в девятимерном «пространстве» с координатами

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_{11}; S_2 = \sigma_{22}; S_3 = \sigma_{33}; S_4 = \sigma_{23}; \\ S_5 &= \sigma_{31}; S_6 = \sigma_{12}; S_7 = \sigma_{32}; S_8 = \sigma_{13}; S_9 = \sigma_{21}. \end{aligned} \quad (2)$$

При определении функции $A(\alpha_k)$ рассмотрены два уровня точности, первый из которых ограничен полиномом второй степени

$$A(\alpha_k) = \alpha_0 + \alpha_k \alpha_k + \alpha_{km} \alpha_k \alpha_m / 2; W = B_k S_k S + B_k S_k S / 2; \quad (3)$$

а второй уровень – полиномом третьей степени

$$\begin{aligned} A(\alpha_k) &= \alpha_0 + \alpha_k \alpha_k + \alpha_{km} \alpha_k \alpha_m / 2 + \alpha_{kmn} \alpha_k \alpha_m \alpha_n / 3; \\ W &= B_k S_k S + B_{km} S_k S_m / 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $S = (S_k S_k)^{1/2}$; $\alpha_k = S_k / S$; $\alpha_k \alpha_k = 1$; $(k, m, n = 1, 2, \dots, 9)$.

Соотношения (3), (4) обобщают ряд известных уравнений состояния. Однако, как показали исследования, первый уровень точности потенциала деформаций (3) приводит к грубым ограничениям на механические характеристики материалов, а второй уровень соотношений (4) зависит от большого количества констант, подлежащих экспериментальному определению и требующих привлечения опытов по сложному напряженному состоянию.

Поэтому в диссертационной работе сделана попытка построения достаточно простых определяющих соотношений, не имеющих грубых ограничений на константы. Уравнения состояния предлагается постулировать в форме, близкой к обобщенному закону Гука для анизотропных материалов при малых деформациях.

В произвольной ортогональной системе координат закон упругости для анизотропного разносопротивляющегося материала при линейной аппроксимации диаграмм деформирования записывается в виде

$$e_{ij} = C_{ijkl}(\alpha_j) \sigma_{km}; \quad (i, j, k, m=1, 2, 3); \quad (5)$$

где $C_{kkkk} = A_{kkkk} + B_{kkkk} \alpha_{kk}$; $C_{iijj} = A_{iijj} + B_{iijj}(\alpha_{ii} + \alpha_{jj})$; $i \neq j$;

(здесь и далее по индексам не суммировать);

$$C_{iiij} = A_{iiij} + B_{iiij}(\alpha_{ii} + \sqrt{2}\alpha_{ij}); C_{ijij} = A_{ijij} + B_{ijij}\sqrt{2}\alpha_{ij}; i \neq j;$$

$$C_{iijk} = A_{iijk} + B_{iijk}(\alpha_{ii} + \sqrt{2}\alpha_{jk}); j \neq k;$$

$$C_{ijkm} = A_{ijkm} + B_{ijkm}\sqrt{2}(\alpha_{ij} + \alpha_{km}); i \neq j; k \neq m; C_{ijkm} = C_{kmlj};$$

A_{ijkl} , B_{ijkl} – компоненты тензоров четвертого ранга, определяющие физико-механические характеристики материалов из простейших экспериментов (в общем случае число независимых констант равно сорока двум);

Рассмотрены традиционные формы структурной организации анизотропных материалов.

Применительно к принятой общей форме определяющих соотношений (5), уравнения состояния для тела, имеющего плоскость упругой симметрии, представим следующим образом

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33} + [A_{1112} + B_{1112}(\alpha_{11} + \sqrt{2}\alpha_{12})]\tau_{12}; \\
 e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33} + [A_{2212} + B_{2212}(\alpha_{22} + \sqrt{2}\alpha_{12})]\tau_{12}; \\
 e_{33} &= [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22} + \\
 &\quad + (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33} + [A_{3312} + B_{3312}(\alpha_{33} + \sqrt{2}\alpha_{12})]\tau_{12}; \quad (6) \\
 e_{12} &= [A_{1112} + B_{1112}(\alpha_{11} + \sqrt{2}\alpha_{12})]\sigma_{11} + [A_{2212} + B_{2212}(\alpha_{22} + \sqrt{2}\alpha_{12})] \times \\
 &\quad \times \sigma_{22} + [A_{3312} + B_{3312}(\alpha_{33} + \sqrt{2}\alpha_{12})]\sigma_{33} + (A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12})\tau_{12}; \\
 e_{13} &= (A_{1313} + B_{1313}\sqrt{2}\alpha_{13})\tau_{13} + [A_{1323} + B_{1323}\sqrt{2}(\alpha_{13} + \alpha_{23})]\tau_{23}; \\
 e_{23} &= (A_{2323} + B_{2323}\sqrt{2}\alpha_{23})\tau_{23} + [A_{1323} + B_{1323}\sqrt{2}(\alpha_{13} + \alpha_{23})]\tau_{13}.
 \end{aligned}$$

В данном случае число независимых констант сокращается до двадцати шести.

Для ортотропного тела на основании (5) получим

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\
 e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \quad (7) \\
 e_{33} &= [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + (A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})\sigma_{22} + \\
 &\quad + (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33}; \\
 e_{12} &= (A_{1212} + B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12})\tau_{12}; \quad e_{13} = (A_{1313} + B_{1313}\sqrt{2}\alpha_{13})\tau_{13}; \\
 e_{23} &= (A_{2323} + B_{2323}\sqrt{2}\alpha_{23})\tau_{23}.
 \end{aligned}$$

Число независимых характеристик ортотропного материала равно восемнадцати, а для трансверсально изотропного материала сокращается до десяти

$$\begin{aligned}
 e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\
 e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{22})\sigma_{22} + \\
 &\quad + [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \quad (8) \\
 e_{33} &= [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + (A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{13})\sigma_{22} + \\
 &\quad + (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33}; \\
 e_{12} &= [(A_{1211} - A_{1122}) + (B_{1111} - B_{1122})\sqrt{2}\alpha_{12}]\tau_{12};
 \end{aligned}$$

$$e_{13} = (A_{1313} + B_{1313} \sqrt{2\alpha_{13}}) \tau_{13}; \quad e_{23} = (A_{1313} + B_{1313} \sqrt{2\alpha_{23}}) \tau_{23}.$$

Таким образом, для всех уровней анизотропии число констант в два раза больше, чем в классической теории анизотропных сред.

Для оценки непротиворечивости предложенных зависимостей было проведено исследование устойчивости определяющих соотношений в малом по Друккеру. В результате установлена область ограничений на механические характеристики материалов, вытекающих из условия единственности решения. Физико-механические характеристики всех исследуемых в работе материалов укладывались в рамки данных ограничений.

Для определения констант предложенных определяющих соотношений ортотропного и трансверсально изотропного тела достаточно простейших опытов по одноосному растяжению и сжатию в направлении главных осей анизотропии и под углом 45° к ним в плоскостях упругой симметрии данного материала.

Проведя испытание стандартных образцов ортотропного материала на одноосное растяжение и сжатие поочередно вдоль материальных осей x_1, x_2, x_3 и под углом 45° к ним, получено

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= (1 / E_k^+ + 1 / E_k^-) / 2; \quad B_{kkkk} = (1 / E_k^+ - 1 / E_k^-) / 2; \\ A_{11jj} &= -(v_{1j}^+ / E_j^+ + v_{1j}^- / E_j^-) / 2; \quad B_{11jj} = -(v_{1j}^+ / E_j^+ - v_{1j}^- / E_j^-) / 2; \\ A_{1jj1} &= (1 / E_{1j}^+ + 1 / E_{1j}^-) - 0,25[(1 / E_1^+ + 1 / E_j^+ + \\ &\quad + 1 / E_1^- + 1 / E_j^- - 2(v_{j1}^+ / E_1^+ + v_{j1}^- / E_1^-)]; \\ B_{1jj1} &= \sqrt{2}(1 / E_{1j}^+ - 1 / E_{1j}^-) - 0,125\sqrt{2}[(1 / E_1^+ + 1 / E_j^+ - 1 / E_1^- - \\ &\quad - 1 / E_j^-) - 4(v_{j1}^+ / E_1^+ - v_{j1}^- / E_1^-)]; \end{aligned} \quad (9)$$

где E_i^\pm, v_{ij}^\pm - модули упругости и коэффициенты поперечной деформации в направлениях соответствующих главных осей анизотропии; E_{ij}^\pm - модули деформации в направлениях под углом 45° к соответствующим главным осям анизотропии.

По аналогии для трансверсально изотропного тела константы уравнений состояния имеют выражения типа (9). Разница заключается в количестве констант, входящих в выражения для ортотропного и трансверсально изотропного материалов.

Следует заметить, что результаты экспериментов могут представляться с использованием различных вариантов набора констант. Если вместо данных экспериментов по одноосному растяжению и сжатию под углом 45° к направлениям главных осей анизотропии имеются результаты испытаний на сдвиг в главных плоскостях x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3 , то уравнения состояния для ортотропных материалов, связы-

вающие касательные напряжения с деформациями сдвига можно упростить, представив следующим образом

$$e_{ij} = C_{ijij} \epsilon_{ij}; \text{ где } C_{ijij} = 1 / 2G_{ij}; (i, j=1, 2, 3; i \neq j); \quad (10)$$

(по индексам не суммировать).

Обоснование уравнений состояния также выполнялось путем сравнения экспериментальных диаграмм пропорционального деформирования ортотропного материала (стеклоткань - эпоксидная смола) в направлении главных осей анизотропии и под углом $22,5^\circ, 45^\circ$ к ним с теоретически предсказанными. При определении констант за основу были приняты данные экспериментов по одноосному растяжению, сжатию контрольных образцов вдоль главных осей анизотропии и результаты испытаний на чистый сдвиг в главных плоскостях анизотропии. Коэффициенты анизотропии при повороте осей координат вычисляются по обычным формулам преобразования компонентов тензора четвертого ранга, кроме этого пересчету подлежат нормированные напряжения.

Результаты, полученные согласно предложенным зависимостям, хорошо согласуются с аналогичными экспериментальными данными. Это подтверждает адекватность принятой модели анизотропных разносопротивляющихся сред реальным состояниям материала.

В третьем разделе для предлагаемого варианта определяющих соотношений разработана общая методика решения задач упругого деформирования трехслойных пластин из анизотропных разносопротивляющихся материалов с учетом влияния поперечного сдвига. Решены задачи о круглой, кольцевой и прямоугольной пластине при различных видах опирания.

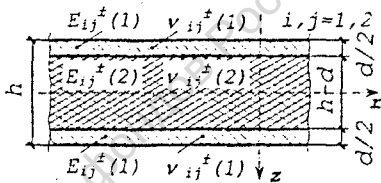


Рис.1

В первой части третьего раздела рассмотрена задача поперечного изгиба трехслойной круглой пластинки средней толщины радиусом R , составленной из двух различных разносопротивляющихся материалов, обладающих цилиндрической анизотропией. Рассмотрены ортотропные и трансверсально изотропные материалы. Внешние слои пластины одинаковы по своим свойствам (см. рис.1). В связи с осевой симметрией поставленной задачи, функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, зависят только от радиальной координаты r .

При решении поставленной задачи для всего пакета слоев в целом введены традиционные для данного класса задач технические гипотезы:

- 1) нормальное к срединной плоскости перемещение w не зависит от координаты z ($e_z = 0$);
- 2) нормаль к срединной плоскости после деформации поворачивается на угол ψ_r относительно оси r и ψ_θ относительно оси θ ;
- 3) при определении параметров напряженного состояния влиянием нормальных напряжений σ_z пренебрегаем.

В рамках принятых гипотез для отличных от нуля перемещений и деформаций можно записать

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= u(r) + z \cdot \psi_\theta(r); \quad u_z(r, z) = w(r). \\ e_r &= u_{,r} + z \cdot \psi_{\theta,r}; \quad e_\theta = u / r + z \cdot \psi_\theta / r; \quad e_{rz} = w_{,r} + \psi_\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Принятые связи между напряжениями и деформациями для ортотропного тела (7) и условия симметрии задачи приводят к выводу о том, что тензор напряжений имеет только три ненулевые компоненты

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & & \\ C_{12} & C_{22} & & \\ & & C_{44} & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_r \\ R_\theta \\ R_{rz} \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Очевидно, что принятые за основу те или иные физические соотношения не вносят изменений в уравнения статико-геометрической природы, поэтому условия равновесия приняты в традиционном виде

$$\begin{aligned} N_{r,r} + (N_r - N_\theta) / r &= 0; \quad Q_{r,r} + Q_r / r = -q; \\ M_{r,r} + (M_r - M_\theta) / r - Q_r &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Система разрешающих дифференциальных уравнений получена относительно перемещений срединной поверхности

$$\begin{cases} u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{K_{22}}{r^2 K_{11}} u = \frac{I_{r,r}}{K_{11}} + \frac{I_r - I_\theta}{r K_{11}}; \\ \psi_{\theta,r} + \frac{1}{r} \psi_\theta + w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} = -\frac{1}{K_{11}} q + \frac{I_{r,r}}{K_{44}} + \frac{I_{rz}}{r K_{44}}; \\ \psi_{\theta,rr} + \frac{1}{r} \psi_{\theta,r} - \left(\frac{P_{22} - P_{12}}{r^2 P_{11}} + \frac{K_{44}}{P_{11}} \right) \psi_\theta - w_{,r} = \frac{J_{r,r} - I_{rz}}{P_{11}} + \frac{J_r - J_\theta}{r P_{11}}. \end{cases} \quad (14)$$

Для полноты системы разрешающих уравнений необходимо задать граничные условия в центре пластины ($r = 0$)

$$u_r = 0, \quad \psi_\theta = 0, \quad w_{,r} = 0 \quad (15)$$

и на контуре ($r = R$) в зависимости от вида опирания:

(16)

- свободное опирание

$$K_{11}u_{,r} + K_{12}u / r = I_r, P_{11}\psi_{\theta,r} + P_{12}\psi_{\theta} / r = J_r, w = 0;$$

- шарнирное опирание

$$u_r = 0, P_{11}\psi_{\theta,r} + P_{12}\psi_{\theta} / r = J_r, w = 0;$$

- скользящая заделка

$$K_{11}u_{,r} + K_{12}u / r = I_r, \psi_{\theta} = 0, w = 0;$$

- жесткое защемление

$$u_r = 0, \psi_{\theta} = 0, w = 0.$$

Во второй части третьего раздела в целях исследования влияния ослабленного сечения на деформирование круглой пластины рассмотрена задача поперечного изгиба трехслойной кольцевой пластины, жестко или шарнирно закрепленной по внешнему контуру. Описана численная реализация задачи и особенности расчета. Проведен анализ результатов решения.

В перемещениях разрешающие уравнения задачи записываются аналогично задаче о круглой пластине (14). Условие свободного края на внутреннем контуре пластины имеет вид

$$K_{11}u_{,r} + K_{12}u / r = I_r; P_{11}\psi_{\theta,r} + P_{12}\psi_{\theta} / r = J_r; w_{,r} + \psi_{\theta} = 0.$$

Граничные условия на внешнем контуре записываются в виде (16).

В третьей части третьего раздела излагается методика расчета упругого деформирования трехслойной прямоугольной пластины средней толщины, выполненной из анизотропных разносопротивляющихся материалов. Исследуется влияние разносопротивляемости материала, поперечного сдвига, а также проводится сравнение с решениями, полученными с использованием наиболее известных моделей анизотропных разносопротивляющихся материалов.

При решении поставленной задачи вводятся гипотезы, аналогичные принятым для расчета круглой пластины, тогда выражения для перемещений и деформаций принимают вид

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_2) - z \cdot \psi_2(x_1, x_2);$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2) - z \cdot \psi_1(x_1, x_2);$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2);$$

(17)

$$e_{11} = u_{,1} - z \cdot \psi_{2,1}; e_{22} = v_{,2} - z \cdot \psi_{1,2}; \gamma_{13} = \psi_2 + w_{,1};$$

$$\gamma_{12} = u_{,2} + v_{,1} - z(\psi_{1,1} + \psi_{2,2}); \gamma_{23} = \psi_1 + w_{,2}.$$

Уравнения равновесия приняты в традиционном виде

$$N_{i,i} + N_{j,j} = 0; Q_{i,i} + Q_{j,j} = -q; M_{i,i} + M_{j,j} - Q_i = 0. \quad (18)$$

Принимая во внимание предложенные физические соотношения, после обычных преобразований приходим к системе разрешающих дифференциальных уравнений в перемещениях (при $i, j = 1, 2, i \neq j, m = i + 3$)

$$\begin{cases} K_{ii} \cdot u_{i,ii} + (K_{ij} + K_{66})u_{j,ij} + K_{66} \cdot u_{i,jj} = I_{i,i} + I_{j,j}; \\ K_{44}(w_{,22} + \psi_{1,2}) + K_{55}(w_{,11} + \psi_{2,1}) = -q + I_{13,1} + I_{23,2}; \\ P_{66} \cdot \psi_{i,ii} + (P_{ij} + P_{66})\psi_{j,ij} + P_{jj} \cdot \psi_{i,jj} - K_{mn}(w_{,j} + \psi_i) = \\ = J_{j,j} + J_{ij,i} - I_{j3}. \end{cases} \quad (19)$$

Для полноты системы разрешающих уравнений необходимо задать граничные условия: (20)

- свободное опирание

$$K_{ii}u_{i,i} + K_{ij}u_{j,j} = I_{ii}, P_{ii}\psi_{j,i} + P_{ij}\psi_{i,j} = J_{ii}, w = 0;$$

- шарнирное опирание

$$u_i = 0, P_{ii}\psi_{j,i} + P_{ij}\psi_{i,j} = J_{ii}, w = 0;$$

- скользящая заделка

$$K_{ii}u_{i,i} + K_{ij}u_{j,j} = I_{ii}, \psi_i = 0, w = 0;$$

- жесткое закрепление

$$u_i = 0, \psi_i = 0, w = 0.$$

Все выше описанные задачи решены методом последовательных приближений в форме упругих решений А.А. Ильюшина. В первом приближении, например, для круглой пластины принимается $I_r = I_\theta = I_{rz} = J_r = J_\theta = 0$. Для решения системы дифференциальных уравнений, ввиду сложности выражений для нелинейных компонентов, использовалась конечно-разностная аппроксимация повышенной точности. Интегрирование по толщине пластины выполнялось по правилу Симпсона. Радиус круглой пластины разбивался на 22 участка, а четвертая часть плана прямоугольных пластины покрывалась сеткой размером 15×15 точек. По толщине внешних и внутреннего слоя рассматривалось 9 и 15 точек соответственно. Сходимость метода упругих решений ограничивалась на основе анализа расчета одиннадцатью итерациями.

На основе модельных алгоритмов был разработан пакет прикладных программ для решения поставленных задач в интерактивной среде для инженерных расчетов MATLAB 5.2. Полученные результаты решения задач иллюстрируют влияние разносопротивляемости материала, а также поперечного сдвига. Приводится сравнение с решениями, полученными на основе различных моделей разномодульной теории уп-

ругости анизотропных материалов, известных ранее (модели С.А. Амбарцумяна, А.А. Золочевского), и предложенных соотношений.

При анализе полученных результатов расчета трехслойных пластин, составленных из анизотропных разносопротивляющихся материалов, проведено исследование влияния граничных условий, сочетаний модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации на параметры напряженно-деформированного состояния. При изменении одного из параметров упругости остальные константы фиксировались. Разносопротивляемость во всех направлениях полагалась одинаковой. Упругие константы для внутреннего слоя определялись пропорционально соответствующим характеристикам внешних слоев. Принималось, что жесткость заполнителя меньше жесткости обкладок.

Установлено, что свойства разносопротивляемости материалов пластин могут привести к отклонениям максимальных прогибов, изгибающих моментов и напряжений, например, для прямоугольной пластины, соответственно до 17%, 20% и 45% (см. рис.2,3), причем на величину этой разницы определенное влияние оказывают граничные условия.

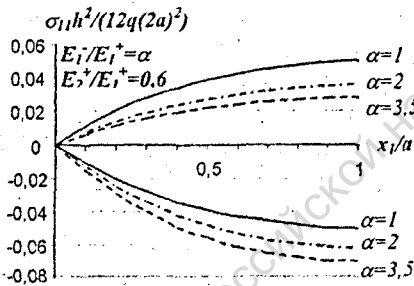


Рис.2

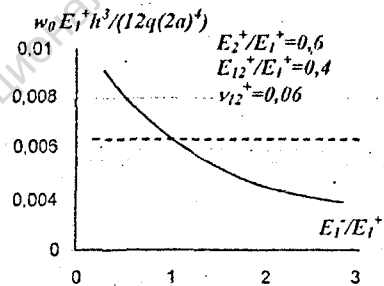


Рис.3

Полученные решения сравнивались с результатами, предсказанными по классической теории анизотропных пластин при осредненных характеристиках упругости:

$$\frac{1}{E_i^0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_i^+} + \frac{1}{E_i^-} \right); \quad \frac{1}{E_{ij}^0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_{ij}^+} + \frac{1}{E_{ij}^-} \right); \quad \frac{\nu_{ij}^0}{E_i^0} = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_{ij}^+}{E_j^+} + \frac{\nu_{ij}^-}{E_j^-} \right).$$

Классическое решение, не учитывающее свойства разносопротивляемости материалов, может привести к погрешностям в определении максимальных напряжений в некоторых случаях до 110%. Отклонения в максимальных прогибах — до 10% в большую или меньшую сторону в зависимости от соотношений основных параметров упругости, при этом характер изменения жесткости ортотропных пластин, в отличие от изотропных, трудно предсказать заранее.

Было проведено сравнение с решением, основанным на гипотезе Кирхгофа-Лява. Установлено, что учет влияния поперечного сдвига может привести к погрешностям в определении основных параметров напряженного состояния: максимального прогиба – до 23%, изгибающих моментов – до 27%, напряжений – до 33% (см. рис.4 – для круглой пластины). При построении графиков введены следующие обозначения: П – решение, полученное с использованием предложенных соотношений; КО – по классической теории анизотропных материалов при осредненных модулях упругости; БС – без учета поперечного сдвига; А – по С.А. Амбарцумяну; З – по А.А. Золочевскому.

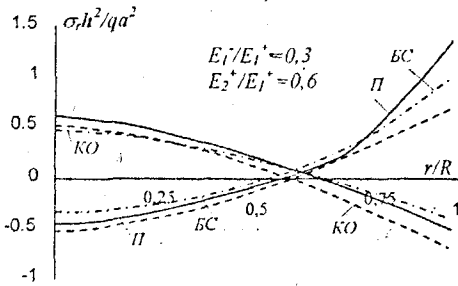


Рис.4

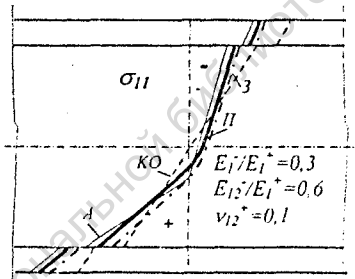


Рис.5

Сравнение решений, полученных на основе различных моделей разномодульной теории упругости, известных ранее и на основе предложенных соотношений позволяет обнаружить ряд качественных и количественных отличий. Характер распределения напряжений по толщине пластины, при расчете с использованием предложенных соотношений, в общем случае нелинейный в отличие от модели С.А. Амбарцумяна, применение которой приводит к кусочно-линейной зависимости. При соблюдении ограничений, накладываемых на упругие константы по теории С.А. Амбарцумяна, отклонения в полученных результатах не превышают 5–8% (см. рис.5).

Помимо модельных в диссертации решены задачи по расчету пластин, составленных из следующих материалов:

для круглой пластины

- 1) внешние слои – изотропный разнсопротивляющийся материал чугун СЧ 12–18;
- 2) внутренний слой – трансверсально изотропный разнсопротивляющийся материал углерод-углеродное волокно – AVCO Mod 3A;

для прямоугольной пластины

- 1) внешние слои – ортотропный разнсопротивляющийся материал каучук с арамидным кордом;
- 2) внутренний слой – ортотропный разнсопротивляющийся материал каучук с полиэфирным кордом.

При отработке численного алгоритма расчета прямоугольных пластин было получено аналитическое решение задачи чистого изгиба тонкой однослойной пластины из ортотропного разносопротивляющегося материала, находящейся под действием равномерно распределенных по контуру моментов интенсивностью m .

В этом случае вместо уравнений равновесия пластинки можно использовать зависимости

$$M_{11} = M_{22} = m; N_{11} = N_{22} = 0, \quad (21)$$

тогда в каждой точке пластины имеем

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_k; \tau_{12} = 0. \quad (22)$$

Очевидно, что распределение напряжений по толщине пластинки при чистом изгибе должно быть кусочно-линейным, тогда положение нейтральной поверхности можно определить из условия $\chi_3 = \Delta \cdot h / 2$.

Выражения для деформаций принимаются с учетом гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\epsilon_{kk} = \epsilon_{kk} + \chi_3 \chi_{kk}; \gamma_{12} = 0; \text{ где } \epsilon_{kk} = u_{,k}; \chi_{kk} = -w_{,kk}. \quad (23)$$

После очевидных преобразований, с учетом условия неразрывности нормальных напряжений, для интегральных характеристик получено

$$M_{kk} = [(1 + \Delta)^2 (2 - \Delta) / P_k^- + (1 - \Delta)^2 (2 + \Delta) / P_k^+] \chi_{kk} h^3 / 48 = m; \\ N_{kk} = -[(1 + \Delta)^2 / P_k^- - (1 - \Delta)^2 / P_k^+] \chi_{kk} h^2 / 8 = 0; \quad (24)$$

$$\text{где } \Delta = \frac{\sqrt{P_1^-} - \sqrt{P_1^+}}{\sqrt{P_1^-} + \sqrt{P_1^+}}; \Delta = \frac{\sqrt{P_2^-} - \sqrt{P_2^+}}{\sqrt{P_2^-} + \sqrt{P_2^+}};$$

$$P_k^+ = \frac{[2(1 - \nu_{km}^+) + \sqrt{2}(1 - 2\nu_{km}^+)]}{4E_k^+} + \frac{[2(1 - \nu_{km}^-) - \sqrt{2}(1 - 2\nu_{km}^-)]}{4E_k^-};$$

$$P_k^- = \frac{[2(1 - \nu_{km}^-) - \sqrt{2}(1 - 2\nu_{km}^-)]}{4E_k^-} + \frac{[2(1 - \nu_{km}^+) + \sqrt{2}(1 - 2\nu_{km}^+)]}{4E_k^+};$$

Окончательно решение задачи получено в виде

$$\chi_{kk} = -w_{,kk} = 2m(\sqrt{P_k^-} + \sqrt{P_k^+})^2 / h^3; \\ \epsilon_{kk} = u_{,k} = -1,5m(\sqrt{P_k^-} - \sqrt{P_k^+})^2 / h^2. \quad (25)$$

Полученное решение справедливо при $P_1^- / P_2^- = P_1^+ / P_2^+$.

Результаты, полученные при аналитическом расчете, сравнивались с численной реализацией при конечно-разностной аппроксимации повышенной точности. При сетке 15×15 на четверти пластинки погрешность в определении параметров напря-

женно-деформированного состояния для решения методом конечных разностей не превысила 0,5%.

В четвертом разделе проведено исследование упругого деформирования трехслойной цилиндрической тонкой оболочки, составленной из анизотропных разносопротивляющихся материалов.

Рассмотрена оболочка в условиях симметричного нагружения с учетом моментности деформированного состояния. Положение любой точки такой оболочки определяется гауссовой системой координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Поверхность $\beta_2\beta_2$ соответствует срединной поверхности оболочки. Коэффициенты Ляме и главные кривизны принимают следующие значения

$$A = B = \text{const} = 1; k_1 = 0; k_2 = k = 1/R. \quad (26)$$

С учетом симметрии задачи все параметры напряженно-деформированного состояния будут зависеть только от координаты β_1 , кинематические соотношения примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{,1} + 0,5\theta_1^2; \varepsilon_2 = k w; \text{ где } \theta_1 = -w_{,1}; \\ \chi_1 &= -w_{,11}; e_{11} = \varepsilon_1 + \beta_3 \chi_1; e_{22} = \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Они справедливы для теории пологих оболочек в квадратичном приближении в условиях малых упругих деформаций.

$$\text{Уравнение совместности деформаций} - k \chi_1 + \varepsilon_{2,11} = 0.$$

Принятые определяющие соотношения (7) и условия симметрии задачи приводят к выводу о том, что тензор напряжений имеет только две ненулевые компоненты

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} R_{11} \\ R_{22} \end{Bmatrix}. \quad (28)$$

Внутренние усилия и моменты приводятся к поверхности $\beta_3 = 0$, и с учетом условия $\beta_3 k \ll 1$ уравнения равновесия определяются соотношениями

$$N_{1,1} = -q_1^2; Q_{1,1} - k N_2 = -q_3; M_{1,1} - Q_1 - N_2 \theta_1 = 0. \quad (29)$$

Система разрешающих дифференциальных уравнений записана в смешанном виде относительно неизвестных угла поворота θ_1 и продольной силы N_2 в тангенциальном направлении:

$$\begin{cases} \theta_{1,1} + R \cdot L_{22} \cdot N_{2,11} = -R \cdot \eta_{2,11}; \\ \theta_{1,111} + \frac{h \cdot q_1^2}{P_{11}} \theta_{1,1} - \frac{1}{R \cdot P_1} N_2 = -\frac{1}{P_{11}} q_3 + \frac{1}{P_{11}} J_{1,11}. \end{cases} \quad (30)$$

Для того чтобы система дифференциальных уравнений была замкнутой, необходимо записать граничные условия на торцах оболочки (один из торцов считается подвижным в тангенциальном направлении):

шарнирно подвижное закрепление - $\theta_{1,1} = \frac{1}{P_{11}} J_1; N_2 = 0;$

скользящая заделка - $\theta_1 = 0; N_2 = 0;$

шарнирное закрепление - $\theta_{1,1} = \frac{1}{P_{11}} J_1; N_2 = \frac{L_{12}}{L_{22}} h \cdot q_1^0 - \frac{1}{L_{22}} \eta_2;$

жесткое защемление - $\theta_1 = 0; N_2 = \frac{L_{12}}{L_{22}} h \cdot q_1^0 - \frac{1}{L_{22}} \eta_2.$

Задача решена методом последовательных приближений в форме "упругих решений". Для решения системы дифференциальных уравнений использовалась конечно-разностная аппроксимация повышенной точности. По длине оболочка разбивалась на 42 участка. По толщине внешних и внутреннего слоя рассматривалось 9 и 15 точек соответственно. Отношение толщины оболочки к ее радиусу принималось равным $h/R = 400$.

Полученные результаты решения задачи иллюстрируют влияние разносопротивляемости материала. Неучет этих свойств приводит к погрешности в определении максимальных прогибов, изгибающих моментов и напряжений соответственно до 8%, 15%, 40%. Показано сравнение с решениями, полученными на основе различных моделей разномодульной теории упругости анизотропных материалов, известных ранее, и предложенных соотношений. Исследовано влияние длины на изменение основных параметров напряженно-деформированного состояния (см. рис.6). Следует отметить значительное влияние соотношений модулей упругости и коэффициентов поперечной деформации на НДС оболочки (см. рис. 7).

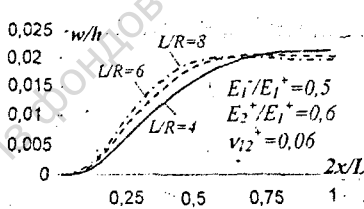


Рис.6

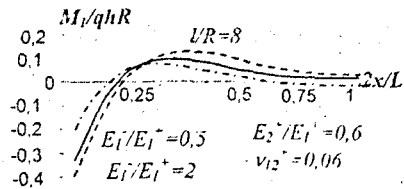


Рис.7

В заключении приведены основные результаты и выводы по работе.

В приложениях представлен графический материал как результат выполненных расчетов и фрагмент пакета прикладных программ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. В целом по своему теоретическому и практическому значению проведенные исследования можно квалифицировать как новое решение научно-технической задачи механики деформируемого твердого тела.

2. В рамках подхода, связанного с нормированным пространством напряжений, предложен вариант построения определяющих соотношений структурно анизотропных упругих материалов, чувствительных к виду напряженного состояния.

3. Определяющие соотношения конкретизированы для традиционных форм структурной организации анизотропных материалов.

4. Разработана методика определения констант предложенных соотношений с учетом выполнения постулата устойчивости в малом.

5. Проведено сравнение полученных определяющих соотношений с результатами экспериментальных исследований, которое показывает адекватность предложенных теоретических зависимостей реальным напряженно-деформированным состояниям ряда конструкционных материалов, что подтверждает их достоверность.

6. Построены разрешающие уравнения упругого деформирования трехслойных пластин, составленных из анизотропных разносопротивляющихся материалов, с учетом поперечного сдвига. Показано, что учет свойств разносопротивляемости может привести к большим погрешностям в определении основных параметров напряженного состояния. Подтверждено существенное влияние трансверсальной сдвиговой жесткости НДС слоистых пластин из анизотропных разносопротивляющихся материалов.

7. Разработана математическая модель деформирования трехслойных цилиндрических оболочек из анизотропных материалов с учетом разносопротивляемости. При решении конкретных задач на основе предложенной модели подтверждено наличие известных фактов и обнаружены новые количественные эффекты деформирования.

По материалам диссертации опубликованы следующие работы:

1. Судакова И.А., Трещев А.А. Вариант повышения надежности и безопасности эксплуатации слоистых пластин, подверженных динамическому воздействию // Труды 1-й Международной конференции по проблемам экологии и безопасности жизнедеятельности. - Тула: ТулГУ. - 1997. - с. 527-532.

2. Судакова И.А., Трещев А.А. Свободные колебания трехслойной пластинки, составленной из материалов, имеющих структурную и деформационную анизотропию / Дифференциальные уравнения и прикладные задачи // Сборник научных трудов. - Тула: ТулГУ. - 1997. - с. 126-130.

3. Жидков А.Е., Судакова И.А., Трещев А.А. К вопросу устойчивости оболочек нулевой гауссовой кривизны из нелинейного материала // Известия ТулГУ. Серия:

Математика, механика, информатика. - Тула: Изд-во Шар. - 1997. - Вып. ... Т.3. - с. 102-105.

4. Жидков А.Е., Судакова И.А., Трещев А.А. Свободные колебания пластин из материалов со структурной и деформационной анизотропией - Тула: ТулГУ. - 1998. - Деп. В ВИНТИ от 16.03.98, №730-B98.

5. Судакова И.А., Трещев А.А. Свободные колебания осесимметричной трехслойной пластинки, составленной из материалов, имеющих структурную и деформационную анизотропию // Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. - Тула: ТулГУ. - 1998. - с. 136-139.

6. Судакова И.А., Трещев А.А. Вариант повышения надежности и безопасности эксплуатации цилиндрической трехслойной оболочки // Энергосбережение, экология и безопасность. Международная научно-техническая конференция. - Тула: ТулГУ. - 1999. - с. 155-157.

7. Судакова И.А., Трещев А.А. Описание деформирования структурно анизотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния // Материалы 30-ой Всероссийской научно-технической конференции "Актуальные проблемы современного строительства" - Пенза: ПГАСА, 1999.- с.114.

8. Судакова И.А., Трещев А.А. Описание деформирования анизотропных разносопротивляющихся материалов // Тезисы докладов Всероссийской научно-практической конференции "Прикладная математика - 99" - Тула: ТулГУ, 1999.- с.94-95.

9. Судакова И.А., Трещев А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойных плит, используемых для покрытий и перекрытий подземных сооружений при воздействии динамических нагрузок // Материалы Международной конференции "Проблемы освоения подземного пространства" - Тула: ТулГУ, 2000.- с.170-174.

10. Судакова И.А., Трещев А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек // Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции "Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии" - Тула: ТулГУ, 2000.- с.105-106.

11. Судакова И.А., Трещев А.А. Обобщение закона упругости для анизотропных материалов // Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции "Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии" - Тула: ТулГУ; 2000.- с.110-111.

Автор выражает глубокую признательность к-ту техн. наук, доценту Г.Н. Теличко и к-ту техн. наук, доценту А.Е. Жидкову за оказанные консультации при подготовке работы.

Подписано в печать 20.11.00. Формат бумаги 60x84 1/16. Бумага типографская № 2
Офсетная печать. Усл. печ. л. 41. Усл. кр.-отт. 41. Уч. изд. л. 40
Тираж 50 экз. Заказ 721.
Тульский государственный университет. 300600, г. Тула, пр. Ленина, 92.
Редакционно-издательский центр Тульского государственного университета.

