Научно-исследовательский институт математики и механики
имени Н.Г. Чеботарева

На правах рукописи

Пермякова Елена Евгеньевна

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ СО СЛУЧАЙНОЙ ЗАМЕНОЙ ВРЕМЕНИ

Специальность 01.01.05 – теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань 2008 г.

Работа выполнена в отделе теории вероятностей и математической статистики Научно-исследовательского института математики и механики имени Н.Г. Чеботарева.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук А. Н. Чупрунов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук,профессор В. Ю. Королев
	доктор физико-математических наук, профессор Ю. С. Хохлов
Ведущая организация:	Санкт-Петербургский государственный университет

Защита состоится 14 ноября 2008 г. в 11 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.44 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 2-ой учебный корпус, факультет вычислительной математики и кибернетики, аудитория № 685.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
факультета ВМиК МГУ имени М.В. Ломоносова.

С текстом автореферата можно ознакомиться на официальном сайте факультета ВМиК Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова http://www.cs.msu.ru

в разделе "Наука" — "Работа диссертационных советов" — "Д 501.001.44".

Автореферат разослан "__" октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.44
профессор

Н. П. Трифонов

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Предельные теоремы являются одной из наиболее развитых и важных частей теории случайных процессов. С точки зрения приложений особый интерес представляют случайные процессы со случайной заменой времени (суперпозиция случайных процессов). Интерес к подобным задачам первоначально возник в связи с рядом задач в страховой и финансовой математике, физике, теории массового обслуживания, теории надежности (работы Гнеденко Б.В., Круглова В.М., Королева В.Ю., Бенинга В.Е., Шоргина С.Я.Кокса Д., Калашникова В.В.) Насколько нам известно, впервые попытка систематического изучения общих условий слабой сходимости распределений сложных случайных функций, представляющих собой суперпозицию случайных процессов без разрывов второго рода, была предпринята Д.С. Сильвестровым (в 1974 году вышла в свет монография, посвященная предельным теоремам для сложных случайных функций[1]). В тесной связи с этой задачей находятся задачи о сходимости марковских процессов, остановленных в случайные моменты времени устойчивых случайных процессов со случайными параметрами, сходимости случайных сумм и процессов Кокса (исследования Королева В.Ю, Круглова В.М., Бенинга В.Е., Шоргина С.Я., Кащеева Д.Е., Кудрявцева А.А.) и пр. Часто решения таких задач также могут быть получены из общих теорем о сходимости случайных процессов со случайной заменой времени. По-видимому, в наиболее общем виде задача нахождения достаточных условий сходимости распределений суперпозиций случайных процессов была решена Сильвестровым Д.С. В опубликованной им в 2006 году статье[2] приведены достаточные условия слабой сходимости распределений в топологии Скорохода сложных случайных функций, представляющих собой суперпозицию случайных процессов без разрывов второго рода.

Остановимся чуть более подробно на прикладных задачах теории случайных процессов, имеющих дело с случайными процессами со случайной заменой времени.

Одной из наиболее важных задач является задача нахождения усло-

[1]Сильвестров, Д.С. *Предельные теоремы для сложных случайных функций.*/Д.С. Сильвестров — Киев: Вища школа, 1974. — 320 с.

[2]Silvestrov, D. *Limit theorems for randomly stopped stochastic processes.*/D. Silvestrov// Journal of Mathematical Sciences. — 2006. — 138. — No. 1, p. 5467-5471.

вий сходимости так называемых *случайных сумм*, т.е. сумм случайного числа случайных элементов. Если случайное число слагаемых задается некоторым случайным процессом, то во многих случаях такие предельные теоремы также можно рассматривать как предельные теоремы для случайных процессов со случайной заменой времени.

Частным случаем задачи о нахождении условий сходимости случайных сумм можно считать задачу нахождения условий сходимости *процессов риска* — случайных процессов, описывающих поведение во времени денежного резерва страховой компании. С изучением процессов риска связан широкий круг задач: вычисление вероятности разорения, построение аппроксимаций для распределения суммарных страховых выплат, оптимизация основных параметров страховой деятельности (страховых тарифов, начального капитала и пр.) Эти задачи описаны в работах Королева В.Ю., Шоргина С.Я., Бенинга В.Е., Кудрявцева А.А. и др. Кроме того, многие модели работы финансовых рынков основываются на использовании так называемых *процессов Кокса* и *обобщенных процессов Кокса* — т.е. случайных процессов со случайной заменой времени, у которых внешним случайным процессом является, соответственно, пуассоновский случайный процесс или пуассоновская случайная сумма. Исследованию ассимптотического поведения таких процессов посвящены, например, работы Королева В.Ю.[3], Грэнделла Дж.[4], Кащеева Д.Е.[5]. Отметим, что Кащеевым Д.Е. были получены функциональные предельные теоремы, устанавливающие достаточные условия сходимости по распределению в пространстве Скорохода к процессам Леви для нецентрированных и неслучайно центрированных обобщенных процессов Кокса. Данные результаты применены к построению моделей финансовых рынков.

Большое внимание исследователей привлекает задача о нахождении достаточных условий сходимости обобщенных процессов восстановле-

[3]Королев, В.Ю. *О сходимости распределений обобщенных процессов Кокса к устойчивым законам.*/В.Ю. Королев// Теория вероятн. и ее примен. — 1998. — т. 43. — вып. 4. — с. 786-792

[4]Grandell, J. *Doubly stochastic Poisson processes.*/J. Grandell// — Lect. Notes Math. — 1976. — V. 529. — p. 1-234.

[5]Кащеев, Д.Е. *Моделирование динамики финансовых временных рядов и оценивание производных финансовых инструментов.*: дисс. ...канд. физ-мат. наук : защищена 12.04.2001: утв. 12.03.2001/Д.Е. Кащеев — Тверь: Изд-во ТГУ, 2001. — 191 с.

ния (см., например, работы Боровкова А.А.[6], Биллингсли П.[7], Фролова А.Н.[8]) и задача о нахождении достаточных условий сходимости марковских и полумарковских случайных процессов, остановленных в случайные моменты времени. Отметим, что в 2007 году Сильвестровым Д.С. совместно с Дрозденко М.О. были получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости последовательностей времен *первой редкой остановки* (first-rare-event times) для полумарковских процессов[9]

В диссертации изучается вопрос о сходимости случайных процессов со случайной заменой времени в пространстве Скорохода. Принадлежность траекторий этих процессов пространству Скорохода влечет наложение условия на траектории процесса, при помощи которого осуществляется случайная замена времени (т.е. внутреннего случайного процесса), состоящего в неубывании траекторий. Данное условие необходимо для того, чтобы случайный процесс со случайной заменой времени снова лежал в пространстве Скорохода. Кроме того, естественным образом накладываются условия сходимости распределений последовательностей внутренних и внешних процессов, составляющих суперпозицию.

Д.С. Сильвестровым[10] было получено, помимо перечисленных выше, дополнительное условие, состоящее в требовании непрерывности с вероятностью единица внешнего случайного процесса во всех точках, являющихся значениями внутреннего случайного процесса. В диссертации доказано, что данное условие можно заменить более слабым. Достаточно потребовать, чтобы отрезок $[0,1]$ можно было разбить на куски, на каждом из которых выполняется либо условие, полученное Сильвестровым Д.С., либо условие на траектории внутренних случайных процессов, состоящее в их непрерывности, монотонном возрастании и закрепленности в точках разбиения отрезка траекторий *всех* внутренних случайных процессов.

[6]Боровков, А.А. *Сходимость распределений функционалов от случайных процессов.*/А.А.Боровков// Успехи матем. наук. — 1972. — т. 27, вып. 1 — с. 11-41.

[7]Биллингсли, П. *Сходимость вероятностных мер.* /П. Биллингсли — М.: Наука, 1977. —352 с.

[8]Фролов, А.Н. *Предельные теоремы для приращений обобщенных процессов восстановления.* /А.Н. Фролов// Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2007. — т. 351. — с. 259–283

[9]Silvestrov, D.S. *Necessary and sufficient conditions for weak convergence of first-rare-event times for semi-Markov processes. I,II.*/D.S. Silvestrov, M.O. Drozdenko// Theory Stoch. Proces. — 2006. — 12(28) — 3-4. — p. 151-202.

[10]Silvestrov, D. *Limit theorems for randomly stopped stochastic processes.*/D. Silvestrov// Journal of Mathematical Sciences. — 2006. — 138. — No. 1, p. 5467-5471.

Цель работы.

Целью данной работы является получение предельных теорем для случайных процессов со случайной заменой времени и предельных теорем о сходимости к α-устойчивым случайным процессам со случайной заменой времени; предельных теорем для случайных сумм и для последовательностей случайных величин со случайным индексом, а также получения приложений этих результатов к страховой математике. Кроме того, целью работы является получение версий почти наверное рассмотренных в диссертации классов предельных теорем.

Общая методика исследований. В работе используются классические методы теории вероятностей. При доказательстве предельных теорем для случайных процессов со случайной заменой времени используется теорема Скорохода об одном вероятностном пространстве, предельные теоремы о сходимости к α-устойчивым случайным процессам со случайной заменой времени опираются на известные из работ Гнеденко Б.В. и Колмогорова А.Н. условия для областей притяжения α-устойчивых случайных процессов. Доказательство версий почти наверное предельных теорем опирается на теорему о достаточном условии существования версии почти наверное предельной теоремы, полученную Чупруновым А.Н. и Фазекашем И.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. доказана теорема о достаточном условии сходимости случайных процессов со случайной заменой времени;

2. доказана теорема о сходимости случайных ступенчатых процессов к обобщенному процессу Кокса;

3. получены версии почти наверное предельных теорем о сходимости случайных процессов со случайной заменой времени.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер. Особенностью представленных в диссертации результатов, отличающих их от предшествующих, является обобщение теоремы о достаточном условии сходимости последовательности случайных процессов со случайной заменой времени, известной из статьи Сильвестрова Д.С.[11] Кроме того, доказательство теоремы о схо-

[11]Silvestrov, D. *Limit theorems for randomly stopped stochastic processes.*

димости последовательностей случайных ступенчатых процессов основано на новом максимальном неравенстве для полиномиальных распределений и новой многомерной предельной теореме для полиномиальных распределений.

Апробация работы. По теме диссертации опубликовано 6 печатных работ. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры математической статистики факультета ВМиК, МГУ им. М.В. Ломоносова, на семинарах отдела теории вероятностей и математической статистики НИММ им. Н. Г. Чеботарева, на конференциях им. Лобачевского в 2004, 2005 и 2006 г.г., на секционном заседании ВШКСМ/ВСППМ 2006.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 71 наименование. Объем работы 105 страниц.

Содержание работы.

Общая постановка основной задачи диссертации такова. Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ определены последовательности независимых случайных процессов X'_n, Λ_n, траектории которых лежат в пространствах Скорохода $D[0,\infty)$ и $D[0,1]$, соответственно. Предположим, что существуют случайные процессы X' и Λ такие, что

$$X'_n \xrightarrow{d} X' \text{ при } n \to \infty \text{ в } D[0,\infty), \quad \Lambda_n \xrightarrow{d} \Lambda \text{ при } n \to \infty \text{ в } D[0,1].$$

Обозначим через $X_n(t) = X'_n(\Lambda_n(t))$, $X(t) = X'(\Lambda(t))$. Нас будут интересовать условия, которые достаточно наложить на случайные процессы X', Λ_n, Λ, при выполнении которых была бы верна сходимость: $X_n \xrightarrow{d} X$ при $n \to \infty$ в пространстве Скорохода $D[0,1]$. Как показывает следующий пример, в общем случае сходимости не будет даже для неслучайных функций из пространства Скорохода. Рассмотрим последовательность функций

$$g_n(t) = \begin{cases} 1 \text{ при} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \leqslant t < \infty, \\ 0 \text{ при} & 0 \leqslant t < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}. \end{cases}$$

Тогда $g_n \xrightarrow{d} g$ при $n \to \infty$ в $D[0,\infty)$, где

$$g(t) = \begin{cases} 1 \text{ при} & \frac{1}{2} \leqslant t < \infty, \\ 0 \text{ при} & 0 \leqslant t < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть последовательность функций $\gamma_n(t)$, $t \in [0,1]$, принимает постоянные значения: $\gamma_n(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}$ и $\gamma(t) = \frac{1}{2}$. Очевидно, $\gamma_n(t) \to \gamma(t)$ при $n \to \infty$. Нетрудно видеть, что $g_n(\gamma_n(t)) \equiv 0$, $g(\gamma(t)) \equiv 1$ и, следовательно, $g_n \circ \gamma_n \not\to g \circ \gamma$ при $n \to \infty$ в $D[0,1]$.

Задача в подобной постановке (однако без условия независимости случайных процессов X' и Λ), была исследована Сильвестровым Д.С. В его монографии[12] были получены достаточные условия на предельные случайные процессы X' и Λ, при выполнении которых интересующая нас сходимость верна. Для рассматриваемого нами случая эти условия можно свести к следующей теореме.

Теорема 1. *Если случайные процессы X'_n и Λ_n независимы и выполняются условия:*

(A): *процесс $\Lambda_n(t)$, $t \in [0,1]$ монотонно не убывает и $\Lambda_n(0) \geqslant 0$ с вероятностью 1;*

(B) : $X'_n \xrightarrow{d} X'$ *при $n \to \infty$ в пространстве $D[0,\infty)$;*

(C) : $\Lambda_n \xrightarrow{d} \Lambda$ *при $n \to \infty$ в пространстве $D[0,1]$;*

(D): *случайный процесс $X'(t)$, $t \geqslant 0$ непрерывен с вероятностью 1 в точке $\Lambda(s)$ для каждого $s \geqslant 0$,*

то $X_n \xrightarrow{d} X$ при $n \to \infty$ в пространстве $D[0,1]$.

Рассмотрим условия теоремы более внимательно.

Условие (A) обеспечивает принадлежность траекторий случайных процессов X_n пространству Скорохода $D[0,1]$. Условия (B) и (C) представляются естественными. В диссертации доказано, что условие (D) может быть заменено на более общее. В теореме 1.9 главы 1 доказывается сходимость суперпозиций случайных процессов также в том случае, если отрезок $[0,1]$ можно разбить на конечное число кусков, на каждом из которых выполняется либо условие (D), либо условие на случайные процессы Λ_n, Λ, состоящее в требовании строгого возрастания и непрерывности траекторий, а также их "закрепленности"на концах кусков отрезка. То есть, рассматривается, в дополнение к приведенным, следующее условие:

$$\text{траектории процессов } \Lambda_n, \Lambda \text{ лежат в пространстве } \Pi[a,b], \qquad (A1)$$

где $\Pi[a,b]$ — пространство непрерывных строго возрастающих функций

[12]*Сильвестров, Д. С. Предельные теоремы для сложных случайных функций.*/Д.С. Сильвестров — Киев: Вища школа, 1974. — 320 с.

на отрезке $[a, b]$, для которых выполняется условие:

$$\text{существует } C > 0 \text{ такое, что } \; f(1) = C \text{ для любой функции } f \in \Pi[a, b]. \qquad (*)$$

и доказывается следующая теорема:

Теорема 1.3 *Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ случайные процессы X'_n и Λ_n, X' и Λ независимы, $\Lambda_n \xrightarrow{d} \Lambda$ при $n \to \infty$ в $D[0,1]$, $X'_n \xrightarrow{d} X'$ при $n \to \infty$ в $D[0,\infty)$, условие (A) выполнено и существует разбиение отрезка $[0,1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$, такое, что на каждом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ будет выполняться условие $(A1)$ или (D). Тогда*

$$X_n \xrightarrow{d} X \text{ при } n \to \infty \text{ в } D[0,1].$$

Теорему о сходимости случайных процессов со случайной заменой времени можно применить к широкому классу задач, в которых предельным для последовательности X'_n является процесс Леви. Напомним, что процессом Леви называется однородный стохастически непрерывный случайный процесс с независимыми приращениями, траектории которого с вероятностью единица лежат в пространстве Скорохода (в силу требования стохастической непрерывности условие (D) теоремы 1.9 выполнено). Большинство процессов, изучающихся в страховой и финансовой математике, обладают этими свойствами (винеровский процесс $W(t)$, пуассоновский процесс $\pi(t)$, устойчивые процессы и пр.).

Рассмотрим суммы независимых случайных величин Y_{nj}, $j, n \in \mathbb{N}$

$$X'_n(t) = \sum_{j=1}^{[nt]} Y_{nj}, \; t \in [0, \infty).$$

Предположим, что существует процесс Леви V такой, что верна сходимость

$$X'_n \xrightarrow{d} V \text{ при } n \to \infty \text{ в пространстве } D[0,\infty).$$

Будем обозначать через $\Lambda_n(t)$ дискретный случайный процесс с неубывающими траекториями, принадлежащими пространству Скорохода $D[0,1]$ и принимающий значения в $\mathbb{N}$. Будем считать, что верна сходимость

$$\frac{\Lambda_n}{n} \xrightarrow{d} \Lambda \text{ при } n \to \infty$$

в $D[0,1]$. Пусть, кроме того, случайные процессы Λ_n и случайные величины Y_{nj} независимы для всех $n, j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$X_n(t) = \sum_{j=1}^{\Lambda_n(t)} Y_{nj}, \quad t \in [0,1],$$

траектории которых лежат в пространстве Скорохода $D[0,1]$.

Пусть случайный процесс

$$X_\Lambda(t) = V(\Lambda(t)), \ \ t \in [0,1].$$

В этих обозначениях верна следующая теорема:

Теорема 1.4 *Пусть $X'_n \xrightarrow{d} V$ при $n \to \infty$, $\Lambda_n \xrightarrow{d} \Lambda$ при $n \to \infty$ в $D[0,1]$, причем случайные процессы Λ_n и случайные величины Y_{nj} независимы для всех $n, j \in \mathbb{N}$. Тогда $X_n \xrightarrow{d} X_\Lambda$ при $n \to \infty$ в $D[0,1]$.*

Представляет интерес также вопрос об условиях сходимости случайных процессов со случайной заменой времени к α-устойчивым случайным процессам со случайной заменой времени. Напомним, что α-устойчивым случайным процессом называется случайный процесс Леви, одномерные распределения которого имеют устойчивое распределение с параметром α, $0 < \alpha \leqslant 2$. В главе 1 получены теоремы о достаточных условиях сходимости последовательностей процессов Леви к α-устойчивым процессам, и теоремы о достаточных условиях сходимости последовательностей случайных процессов со случайной заменой времени к α-устойчивым процессам со случайной заменой времени.

Мы рассматриваем последовательность случайных процессов

$$X'_n(t) = \frac{V'(s_n t)}{a_n} - s_n t b_n, \quad t \in [0,\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$, $V' = V'(t)$, $t \in [0,\infty)$ — процесс Леви и a_n, b_n, $s_n \in \mathbb{R}$ и приводим условия на числовые последовательности a_n, b_n, s_n и процесс V', при выполнении которых X'_n сходятся к α-устойчивому процессу. Затем полученные результаты мы переносим на последовательности случайных процессов вида

$$X_n(t) = \frac{V(t)}{a_n} - \Lambda_n(t) b_n, \quad t \in [0,\infty), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$, $V = V'(\Lambda(t))$, $t \in [0, \infty)$ — процесс Леви со случайной заменой времени и a_n, b_n, $s_n \in \mathbb{R}$ (здесь процессы V' и Λ_n независимы).

Теорему 1.9 можно использовать также для доказательства предельных теорем для последовательностей случайных величин со случайным индексом. Действительно, рассмотрим последовательность случайных величин Y_n, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся по распределению к случайной величине Y при $n \to \infty$. Пусть случайные величины ν_n, $n \in \mathbb{N}$ принимают значения в множестве натуральных чисел и не зависят от Y_n, причем

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{d} \nu \text{ при } n \to \infty.$$

Рассмотрим последовательность случайных процессов $X'_n(t) = Y_{[nt]}, t \in [0, 1]$. Заметим, что траектории X'_n являются ступенчатыми и лежат в пространстве Скорохода $D[0, 1]$. Пусть $X_n(t) = X'_n\left(\frac{\nu_n}{n}\right) = Y_{\nu_n}$ — случайный процесс со случайной заменой времени. Из теоремы 1.9 следует

Теорема 1.20 *Пусть $Y_n \xrightarrow{d} Y$ при $n \to \infty$, $\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{d} \nu$ при $n \to \infty$ и случайные величины Y_n и ν_n независимы. Тогда $Y_{\nu_n} \xrightarrow{d} Y$ при $n \to \infty$.*

Пусть траектории последовательностей случайных процессов X'_n и Λ_n лежат в пространствах Скорохода $D[0, \infty)$ и $D[0, 1]$ соответственно. Можно считать, что эти процессы заданы на разных вероятностных пространствах: случайные процессы X'_n — на пространстве $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1)$, случайные процессы Λ_n — на пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Тогда можно считать, что суперпозиция случайных процессов $X_n(t, \omega) \equiv X'_n(\Lambda(t, \omega))$ определена на вероятностном пространстве $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1)$ и зависит от случайного параметра $\omega \in \Omega$. Следствием доказанных в работе теорем о сходимости случайных процессов со случайной заменой времени является сходимость

$$X_n(\omega) \xrightarrow{d} X(\omega) \text{ при } n \to \infty$$

в пространстве Скорохода $D[0, 1]$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Вернемся к рассмотрению случайных сумм.

В главе 2 доказывается теорема о сходимости последовательности случайных ступенчатых линий к обобщенному пуассоновскому процессу. Рассматривается следующая задача.

Пусть события $A_{ij}(n)$, $1 \leqslant j < \infty$, $1 \leqslant i \leqslant n$ определены на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}\}$ и удовлетворяют следующим условиям:

(A1) вероятности событий $A_{ij}(n)$ не зависят от индекса j (т. е. поток событий A_{ij} однороден) и

$$\mathbf{P}_1\{A_{ij}(n)\} \triangleq p_i(n) \equiv p_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j < \infty;$$

(A2) для каждого фиксированного j события $A_{ij}(n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, несовместны;

(A3) классы событий $\{A_{ij}(n), 1 \leqslant i \leqslant n\}$, $1 \leqslant j < \infty$ независимы;

(A4) для каждого $x \in [0,1]$ существует предел:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 p_{[xn]}(n) = p(x),$$

эта сходимость равномерна и функция $p(x)$ непрерывна.

Пусть случайные величины $Y_{nj}, 1 \leqslant j < \infty$, заданы на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}\}$. Будем предполагать, что эти случайные величины независимы, одинаково распределены и существует такая случайная величина Y_0, что

$$Y_{nj} \xrightarrow{d} Y_0, \quad \text{при } n \to \infty.$$

Пусть Y_{0j}, $j \in \mathbb{N}$, - независимые копии случайной величины Y_0.

Кроме того, пусть $\Lambda_n(i)$ — дискретный случайный процссс, принимающий значения в $\mathbb{N}$ и заданный на вероятностном пространстве $\{\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1\}$, причем

$$\Lambda_n(0) \leqslant \Lambda_n(1) \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_n(n).$$

Мы будем считать, что для всех $x \in [0,1]$ существует предел:

$$\frac{\Lambda_n([xn])}{n} \xrightarrow{L_1} \Lambda_0(x) \quad \text{при } n \to \infty, \tag{F}$$

эта сходимость равномерна и функция $\mathbf{E}_1\Lambda_0(x)$ непрерывна.

Рассмотрим марковский момент

$$n_j = \inf\{k \in \mathbb{N} : j \leqslant \Lambda_n(k)\}.$$

Определим события $A'_{kj}(n) = \cup_{i=n_j}^{k} A_{ij}(n)$, и будем предполагать, что $\{\Lambda_n(k),\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$, $\{I_{A_{ij}(n)}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j < \infty\}$— независимые семейства.

Рассмотрим последовательность ступенчатых случайных процессов

$$X_n(t) = X_n(t,\omega) = \sum_{j=1}^{\Lambda_n([nt])} Y_{nj}(\omega)\mathbb{I}_{A'_{[tn]j}}(n), \quad t \in [0,1], \tag{X1}$$

заданных на $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1)$.

Пусть, кроме того,

$$X_\Lambda(t) = \sum_{j=1}^{\pi(\Lambda(t))} Y_{0j}, \;\; t \in [0,1],$$

где случайная величина $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \Lambda_0(x)p(x)dx$, $\pi(t)$ - стандартный пуассоновский процесс и семейства $\{\pi(t), t \in \mathbf{R}^+\}$, $\{\Lambda(t), t \in [0,1]\}$ независимы. Доказана следующая теорема:

Теорема 2.1. *В приведенных выше обозначениях верна сходимость:*

$$X_n \xrightarrow{d} X_\Lambda \text{ при } n \to \infty$$

в пространстве Скорохода $D[0,1]$ *для почти всех* $\omega \in \Omega$.

Эта теорема представляет интерес для приложений к страховой математике: последовательность ступенчатых процессов описывает модель выплат страховой компании, в которой количество клиентов (как функция от времени) является неубывающей случайной функцией. Предполагается, что время может принимать только конечное количество значений, появление нового клиента и страховые выплаты могут происходить только в эти моменты времени и модель представляет из себя последовательность случайных величин, заиндексированных этими моментами времени.

Используя идеи, аналогичные идеям построения модели рынка ценных бумаг с непрерывным временем, по дискретной модели мы строим случайный процесс, траекториями которого являются случайные ступенчатые линии. Этот случайный процесс задается случайными суммами независимых индикаторов (которые являются индикаторами событий, состоящих в том, что клиенту произведена страховая выплата) со случайными коэффициентами (размерами этих выплат), причем коэффициентами являются значения независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на другом вероятностном пространстве. Мы доказываем сходимость по распределению таких случайных процессов в пространстве Скорохода для почти всех значений коэффициентов к неоднородному обобщенному процессу Кокса (теорема 2.1).

Доказательство этого результата основано на известном критерии сходимости по распределению случайных процессов в пространстве Скорохода. Однако наши процессы не имеют независимых приращений и доказательство основано на новом максимальном неравенстве для полиномиальных распределений (лемма 2.2) и новой многомерной предельной теореме для полиномиальных распределений (лемма 2.5). В теореме 2.1 мы доказываем сходимость характеристических функций и не используем известные критерии сходимости сумм независимых случайных величин.

В главе 3 получены оценки скорости сходимости для некоторых из полученных в предшествующих главах теорем, а также рассмотрены приложения этих теорем к страховой математике.

Пусть ξ_{ni} — независимые одинаково распределенные для каждого $n \in \mathbf{N}$ случайные величины. Рассмотрим случайный процесс

$$X_n'(t) = \sum_{i=1}^{\pi(nt)} \xi_{ni}, \qquad t \in [0,1].$$

Пусть $\Lambda_n(t)$ — последовательность случайных процессов с неубывающими траекториями, $\pi(t)$ — пуассоновский случайный процесс.

Предполагая, что у случайных величин ξ_{in} существуют моменты до третьего порядка включительно, обозначим $E\xi_{ni} = a_n$, $D\xi_{ni} = \sigma_n^2$. Нас будет интересовать скорость сходимости одномерных распределений случайного процесса

$$Y_n(t) = \sum_{i=1}^{\pi(\Lambda_n(t))} \frac{\xi_{ni} - a_n}{\sigma_n\sqrt{n}}, \qquad t \in [0,1].$$

к одномерным распределениям предельного случайного процесса. Обозначим через W' винеровский случайный процесс в $D[0,1]$, через W — винеровский случайный процесс со случайной заменой времени: $W(t) = W'(\Lambda(t))$.

Доказана следующая теорема:

Теорема 3.2. *Пусть $\Lambda(t) = at$, Λ_n, π и ξ_{ni} независимы и $E|\xi_{ni}|^3 < +\infty$. Тогда для всех $t \in (0,1]$ верно неравенство:*

$$\sup_x |P\{Y_n(t) < x\} - P\{W(t) < x\}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^*}{\sqrt{n}} \left[\frac{E|\xi_{n1} - a_n|^3}{\sigma_n^3} E\left(\frac{\Lambda_n(t)}{n}\right)^{-1/2} + E\sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda_n(t)}{n}\right)^{-1}} \right] +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{E\left|\frac{\Lambda_n(t)}{n}-at\right|}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{E\left|\frac{\frac{\Lambda_n(t)}{n}-at}{\frac{\Lambda_n(t)}{n}at}\right|},$$

где $0 < C^* < 19,0512$.

Рассмотрим следующую модель: пусть n — количество договоров, заключенных страховой компанией, ξ_{ni} — размер ущерба в i-ом страховом случае для портфеля из n договоров. Естественно предположить, что ξ_{ni} — независимые одинаково распределенные для каждого $n \in \mathrm{N}$ случайные величины. Предположим, что количество событий для портфеля из n договоров к моменту времени t описывается процессом Пуассона $\pi(nt)$ с интенсивностью 1. Тогда случайный процесс

$$X_n'(t)=\sum_{i=1}^{\pi(nt)}\xi_{ni},\qquad t\in[0,1]$$

описывает убытки по полисам страховой компании, наступившие к моменту времени t. Эта модель не учитывает того существенного для многих страховщиков факта, что количество договоров в течение рассматриваемого периода времени (как правило, года), изменяется неравномерно. Пусть $\Lambda_n(t)$ — последовательность случайных процессов, описывающая количество действующих полисов к моменту времени t. Будем считать, что количество полисов, продаваемых компанией, с течением времени растет (т.е. траектории процесса Λ_n не убывают). Тогда случайный процесс

$$X_n(t)=\sum_{i=1}^{\pi(\Lambda_n(t))}\xi_{ni},\qquad t\in[0,1]$$

описывает сумму убытков страховой компании к моменту времени t по действующим на этот момент договорам. Поскольку при заключении договора страхования обычно устанавливается фиксированная страховая сумма, превзойти которую выплата не может, естественно предположить наличие у случайных величин ξ_{ni} моментов всех порядков. Обозначим $E\xi_{ni}=a_n$, $D\xi_{ni}=\sigma_n^2$. Рассмотрим случайный процесс

$$Y_n(t)=\sum_{i=1}^{\pi(\Lambda_n(t))}\frac{\xi_{ni}-a_n}{\sigma_n\sqrt{n}},\qquad t\in[0,1].$$

Обозначим через W' винеровский случайный процесс в $D[0,1]$, через

W — винеровский случайный процесс со случайной заменой времени: $W(t) = W'(\Lambda(t))$.

С точки зрения практических вычислений представляет интерес следующий случай. Предположим, что с ростом страхового портфеля колебания интенсивности сборов становятся незначительными, т. е. $\Lambda(t) = at$ где $a > 0$ — некоторая константа.

Следствие 3.1. *Пусть $\Lambda(t) = at$, Λ_n, π и ξ_{ni} независимы, $E|\xi_{ni}|^3 < +\infty$ и можно выбрать такую постоянную $k > 0$, что*

$$kat \leqslant \frac{\Lambda_n(t)}{n} \text{ для всех } n \in \mathbb{N},\ t \in (0, 1].$$

Тогда для всех $t \in (0, 1]$ верно неравенство:

$$\sup_x |P\{Y_n(t) < x\} - P\{W(t) < x\}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^*}{\sqrt{n}} \left[\frac{E|\xi_{n1} - a_n|^3}{\sigma_n^3} \frac{1}{\sqrt{kat}} + \sqrt{1 + \frac{1}{kat}} \right] + \frac{\sqrt{E\left|\frac{\Lambda_n(t)}{n} - at\right|}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{kat}}\right),$$

где $0 < C^* < 19{,}0512$.

В Главе 4 получены версии почти наверное теорем, доказанных в предыдущих главах. Напомним определение версии почти наверное предельной теоремы. Пусть ζ_n, $n \in \mathbf{N}$— последовательность случайных элементов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ со значениями в метрическом пространстве (B, ρ). Мы будем обозначать через $\xrightarrow{w}$ слабую сходимость мер, через μ_ζ— распределение случайного элемента ζ и через $\mathfrak{B}(\mathbf{B})$ — σ-алгебру борелевских подмножеств метрического пространства $\mathbf{B}$.

Обычные предельные теоремы имеют дело со сходимостью по распределению ζ_n. Рассмотрим последовательность мер, зависящих от параметра ω:

$$Q_n^*[\zeta_n](\omega) = Q_n^*(\omega) = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \delta_{\zeta_k(\omega)},\quad \omega \in \Omega,\ n \in \mathbf{N}.$$

Здесь и в дальнейшем через δ_x мы будем обозначать меру единичной массы, сосредоточенной в точке x (меру Дирака). В некоторых случаях сходимость $\zeta_n \xrightarrow{d} \zeta$ влечет также сходимость мер

$$Q_n^*[\zeta_n](\omega) \xrightarrow{w} \mu_\zeta, \text{ при } n \to \infty,$$

для почти всех $\omega \in \Omega$. Такие предельные теоремы называются версиями почти наверное предельных теорем.

Основные результаты, касающиеся теорем этого вида, изложены в статьях и монографиях Атлага М.[13], Чупрунова А.Н. и Фазекаша И. [14] и др.

Основной в данной главе является следующая теорема:

Теорема 4.1. *Пусть для всех $n \in \mathbb{N}$ случайные процессы X'_n и Λ_n, X' и Λ независимы, выполнены условия (A) или (B) и*

1. Существуют константа $\beta_1 > 0$ и случайные элементы $X'_{lk} \in D[0,\infty)$, $l,k \in \mathbb{N}$, $l < k$ такие, что случайные элементы X'_l и X'_{lk} независимы и для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется константа $C(m) > 0$, для которой выполнено неравенство

$$\mathbf{E}\rho_m(X'_k, X'_{lk}) \leqslant C(m)\left(\frac{l}{k}\right)^{\beta_1};$$

2. Существуют константы $C_1, \beta_2 > 0$ и случайные элементы $\Lambda_{lk} \in D[0,1]$, $l,k \in \mathbb{N}$, $l < k$ такие, что случайные элементы Λ'_l и Λ'_{lk} независимы и

$$\mathbf{E}\rho_1(\Lambda_k, \Lambda_{lk}) \leqslant C_1\left(\frac{l}{k}\right)^{\beta_2}.$$

Тогда

$$Q_{[X_n]}(\omega) \xrightarrow{w} \mu_X \text{ при } n \to \infty$$

для почти всех $\omega \in \Omega$.

Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Чупрунова Алексея Николаевича, которому автор выражает искреннюю признательность.

---

[13] Atlagh, M., *Theoreme centrale limite presque sur et loi du logarithme itere*/M. Atlagh — Institut de recherche mathematique avancee, Strasburg. — 1996.— p. 62.

[14] Chuprunov, A. *Almost sure versions of some functional limit theorems.*/A. Chuprunov, I. Fazekas// Publicationes Mathematicae, Debrecen — 2001. — No. 265. — p. 14.

Публикации автора по теме диссертации

1. Permiakova, E. A continuous analogue of the invariance principle and its almost sure version./E. Permiakova// Publ. Math. Debrecen. — 2007. —70/1-2. — p. 203-210

2. Пермякова, Е.Е. Функциональная предельная теорема для пуассоновского процесса и ее версия почти наверное./Е.Е. Пермякова//Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2005. — т. 12. — вып. 2. — с. 467-468.

3. Чупрунов, А.Н. Сходимость случайных процессов страховых выплат к обобщенному пуассоновскому процессу./А.Н. Чупрунов, Е.Е. Пермякова// Сб. Статистические методы оценивания и проверки гипотез. — Пермь: Изд-во Перм. ун-т, 2006. — с. 149-168.

4. Пермякова, Е.Е. Функциональные предельные теоремы для процессов Леви и их версии почти наверное./Е.Е. Пермякова//Деп. в ВИНИТИ. — 2006. — № 1484-В2006. — с. 24.

5. Permiakova, E. Functional limit theorems for Levy processes and their almost-sure versions./E. Permiakova// Liet. matem. rink. — 2007. — 47. — no. 1. — p. 1-12

6. Пермякова, Е.Е. Предельные теоремы для случайных процессов со случайной заменой времени и их версии почти наверное./Е.Е. Пермякова// Изв. ВУЗов.Математика — 2008. — 12. (в печати).

Напечатано с готового оригинал-макета

Издательство ООО "МАКС Пресс"
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
Подписано к печати 08.10.2008 г.
Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 561.
Тел. 939-3890. Тел./Факс 939-3891.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 627 к.