На правах рукописи

Попов Алексей Михайлович

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЧЕРНИКОВСКИХ ГРУПП И ГРУПП БЛИЗКИХ К ФРОБЕНИУСОВЫМ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Красноярск — 2006

Работа выполнена в Красноярском государственном техническом университете.

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор А. И. Созутов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А. С. Кондратьев
доктор физико-математических наук, профессор В. Н. Ремесленников
доктор физико-математических наук, профессор Б. В. Яковлев

Ведущая организация: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Защита состоится 12. 05. 2006 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д.212.099.02 при Красноярском государственном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Красноярского государственного университета.

Автореферат разослан «10» апреля 2006 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук М. И. Голованов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации исследуются периодические и смешанные группы близкие по свойству расщепляемости к группам Фробениуса: группы с черниковскими централизаторами элементов, группы с системами фробениусовых подгрупп и пары Фробениуса. Черниковские и фробениусовы группы — классические объекты исследований абстрактной теории групп.

Исследуя гипотетическую бесконечную простую p-группу G с условием минимальности в [29], О.Ю. Шмидт доказал, что при $p > 2$ её максимальные подгруппы должны быть сильно изолированы, составлять расщепление группы G, и любая пара её неединичных элементов, взятых из разных компонент, должна порождать всю группу. Среди конечных таких групп не было. Наиболее близкими к ним, за исключением свойства простоты, являлись минимальные группы Фробениуса. Только через 40 лет бесконечные простые группы с указанными экзотическими свойствами были построены А.Ю. Ольшанским [14, 15]. Наиболее впечатляет пример простой бесконечной группы, все собственные подгруппы которой имеют простой порядок и сопряжены [15].

А.Г. Курош в примечании к статье [29] обращает внимание на выдвинутую О.Ю. Шмидтом гипотезу. "Если подгруппа Ф периодической группы Г совпадает со своим нормализатором, взаимно проста со своими сопряжёнными и отлична от своего коммутаната, то группа Г не может быть простой.

Отто Юльевич показывает, что из этой теоремы и некоторых упомянутых выше результатов легко следует локальная конечность p-групп с условием минимальности при всех p."

С.И. Адяном [4] и А.Ю. Ольшанским [15] были построены примеры групп опровергающие эту гипотезу. Но более чем 40-летний опыт иссследований групп со слабыми условиями конечности, показал, что характеризации черниковских групп в классах не локально конечных групп без инволюций, как правило, сводятся к признакам непростоты групп с богатыми системами фробениусовых подгрупп [17].

Почти абелевы группы с условием минимальности впервые были введены С.Н. Черниковым в связи с описанием локально разрешимых групп с условием минимальности для (абелевых) подгрупп [24], [25], [26]. Позднее, такие группы были названы вначале группами Черникова, затем черниковскими [11]. Ещё в 1940 г. А.И. Мальцев [10] доказал, что p-группа тогда и только тогда изоморфна некоторой группе матриц над некоторым полем характеристики отличной от p, когда она является черниковской группой. Этот результат означает, что черниковские p-группы — это в точности p-подгруппы матричных групп характеристики, отличной от p. Учитывая значимость силовской теории для линейных групп, в абстрактной теории особую роль приобретают различные характеризации примарных черниковских групп. Такие характеризации были получены многими авторами. В первую очередь здесь следует упомянуть ставшие уже классическими результаты С.Н. Черникова [26], [27], А.И. Мальцева [10], И.Д. Адо [1], [2], Х.Х. Мухаммеджана [12], Н.Н. Мягковой [13], М.И. Каргаполова [8], Н. Блэкберна [36]. Перечислим наиболее важные из них. Каждая локально конечная p-группа, удовлетворяющая условию минимальности для нормальных делителей, является p-группой Черникова (И.Д. Адо [1], [2]); p-группа, обладающая возрастающим центральным рядом, тогда и только тогда будет черниковской p-группой, если все факторы ее верхнего центрального ряда удовлетворяют условию минимальности (Х.Х. Мухаммеджан [12]); локально конечные p-группы конечного специального ранга являются p-группами Черникова (Н.Н. Мягкова [13]); локально конечная p-группа является черниковской p-группой, если она обладает конечной максимальной элементарной абелевой подгруппой (Н. Блэкберн [36]). Последний результат, с учетом свойств черниковских p-групп можно переформулировать так: локально конечная p-группа является черниковской, если в ней централизатор некоторого элемента порядка p — черниковский. В.П. Шунков [31] обобщил теорему Блэкберна на бипримитивно конечные p-группы, в частности, на произвольные 2-группы.

Шмидт [29] показал, что простых квазичерниковских 2-групп не существует. Как уже упоминалось, Ольшанский для любого нечетного p построил простые квазичерниковские p-группы. В главе 2 диссертации идеи Шмидта и Ольшанского получают дальнейшее развитие. При этом наряду с черниковскими группами в исследованиях появляется континуальное множество нечерниковских групп. Согласно указанным выше результатам, для характеризации черниковских p-групп с черниковским централизатором некоторого элемента необходимы дополнительные условия. Такие условия также найдены в главе 2 в виде слабых условий конечности.

Группа называется *слабо (сопряженно) бипримитивно конечной*, если в ней любая пара (сопряженных) элементов одного и того же простого порядка порождает конечную подгруппу. Если это свойство наследуют все сечения группы по конечным подгруппам, то такая группа называется *(сопряженно) бипримитивно конечной*. Сейчас эти группы называются также *груп-*

пами Шункова. А.И. Созутов предложил элемент a группы G с конечными подгруппами вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ называть *конечным* и называть *H-конечным*, если указанное условие выполняется для $g \in G \setminus H$ [49]. Естественно называть элемент a *почти конечным*, если это условие выполняется почти для всех элементов $a^g \in G$. Ослабление понятия конечного элемента даёт *условие (a,b)-конечности*, когда неединичный элемент a из G порождает почти с каждым элементом (т.е. за исключением, быть может, лишь конечного числа) сопряженным с $b \neq 1$, конечную подгруппу. Развивая идеи конечности, элемент a будем называть обобщённо конечным, если в группе G найдётся нетривиальный элемент b такой, что в G выполняется (a,b)-условие конечности, и такой элемент (не обязательно один и тот же) найдётся в каждом сечении группы G по периодической подгруппе, содержащем образ элемента a. В случае, когда условие обобщённой конечности выполняется для всех элементов простого порядка из G и наследуется всеми ее подгруппами и фактор-группами по периодическим нормальным подгруппам, назовем G *обобщенно конечной группой*. Класс обобщенно конечных групп содержит классы групп Шункова, бипримитивно конечных групп и бинарно конечных групп.

В 1970 году В.П. Шунковым была доказана следующая замечательная теорема [32]. Всякая локально конечная группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых подгрупп является черниковской группой. В связи с тем, что произвольная группа с условием минимальности для абелевых подгрупп не обязана быть черниковской [3], [15] в 70-х годах резко повысился интерес с характеризациям черниковских групп в различных заданных классах групп. В.П. Шунков, А.К. Шлёпкин, А.Н. Остыловский, Н.Г. Сучкова [31, 28, 16, 23, 17] в результате длительных исследований получили следующий результат. Всякая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием (примарной) минимальности для (абелевых) подгрупп является черниковской группой. Таким образом, ряд проблем минимальности С.Н. Черникова полностью решен в классе сопряженно бипримитивно конечных групп. Как известно, в классе периодических групп все они имеют отрицательное решение (П.С. Новиков, С.И. Адян [3, 4], А.Ю. Ольшанский [14, 15]).

Многие важные свойства групп определяются свойствами централизаторов элементов простых порядков. В частности, в упомянутых уже работах [31], [36] черниковость группы при некоторых ограничениях следует из строения централизаторов элементов простых порядков.

В диссертации для групп без инволюций продолжена характеризация черниковских групп, уже не обязательно примарных. Этот подход охватывает полученные А.Н. Остыловским, Н.Г. Сучковой, А.К. Шлёпкиным и В.П. Шунковым результаты, поскольку рассматриваются не сопряжённо бипримитивно конечные группы с условиями минимальности, а группы с почти конечным элементом, централизатор которого черниковский. При некоторых дополнительных условиях также удаётся доказать, что исследуемая группа черниковская, или указать в группе черниковскую нормальную подгруппу.

Основным методом исследования групп с различными условиями конечности, в частности, характеризаций черниковских групп, в настоящее время является метод фробениусовых подгрупп [17], т.е. метод, связанный с теоремой Фробениуса, группами Фробениуса и группами близкими к фробениусовым. Группа $G = F\lambda H$ называется *группой Фробениуса (фробениусовой группой) с дополнением H и ядром F*, если F и H — такие собственные подгруппы группы G, что 1) $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$, 2) $F = \cap_{x \in G}(G \setminus H^{\#})^x = G \setminus \cup_{x \in G}(H \setminus \{1\})^x$ [18]. Если G и H удовлетворяют условию 1 определения группы Фробениуса, то по В.П.Шункову [18] они составляют *пару Фробениуса* (G, H); Ю.М.Горчаков [6] предложил называть в этом случае подгруппу H *обособленной* в G. Элемент a группы G вслед за А.И. Созутовым назовём *H-фробениусовым*, если все подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где $g \in G \setminus H$, а H — собственная подгруппа, являются группами Фробениуса с дополнениями, содержащими элемент a [49].

Если простая квазичерниковская группа G — контрпример к какой-либо проблеме минимальности Черникова — обладает бесконечной максимальной подгруппой H, то нет достаточных оснований утверждать, что (G, H) обязательно пара Фробениуса. Но во многих случаях удаётся доказать, что в G есть H-фробениусовый элемент (см., например, А.Н. Остыловский, В.П. Шунков [16]).

Выделим ситуацию в чистом виде. В группе G есть собственная подгруппа H и элемент a конечного порядка > 2 такие, что для каждого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ — группа Фробениуса. При этом на группу G других условий не накладывается. Случай, когда дополнение в группах L_g совпадает с $\langle a \rangle$ был полностью исследован А.И. Созутовым и В.П. Шунковым [19, 20, 21, 33]. Для конечных групп частные случаи рассматривались также Б. Фишером и М. Ашбахером [37, 38, 35]. Группы Фробениуса в последнее время интенсивно изучались А.Х. Журтовым и В.Д.Мазуровым. В частности, ими доказана конечность группы Фробениуса, порожденной двумя элементами порядка ≤ 4 [7].

Хорошо известно, что дополнительный множитель (конечной) группы Фробениуса вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ может быть и не циклическим. В связи с этим А.И. Созутовым в Коуровской тетради [9] был поставлен следующий

Вопрос 10.61. *Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа, $a \in H$, $a^2 \neq 1$ и для всякого $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ является фробениусовой группой с дополнением, содержащим a. Будет ли подгруппой объединение всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a \rangle$? Особенно интересен случай, когда элемент a с любым своим сопряженным элементом порождают конечную подгруппу.*

В четвёртой главе диссертации представлены результаты о строении группы G и нормального замыкания её элемента a при условии, что в G достаточно много фробениусовых или близких к фробениусовым подгрупп, порождённых парой элементов из a^G. В них утверждается существование в G нормальной подгруппы — ядра некоторой глобальной группы Фробениуса. Подобные теоремы в школе В.П. Шункова принято называть признаками непростоты и они близки по содержанию к теореме Фробениуса. Известные результаты в этом направлении были получены Созутовым, Шунковым [21, 33, 19]. В диссертации основное внимание уделено решению упомянутого вопроса 10.61. В частности, когда элемент a имеет чётный порядок вопрос 10.61 решён полностью, на вторую часть вопроса положительный ответ получен во всех случаях, кроме $|a| \in \{3, 5\}$.

Если (G, H) — пара Фробениуса и G — конечная группа, то G является группой Фробениуса. В этом и заключается знаменитая теорема Фробениуса. Глубокие обобщения теоремы Фробениуса были получены А.И. Созутовым и В.П. Шунковым. В них существенно использовалось "прозрачное"строение конечных групп Фробениуса: нильпотентность ядер и полностью изученные до порождающих и определяющих соотношений неинвариантные множители (см., например, параграф 4 главы 1). Определяя бесконечные группы Фробениуса в виде "ромашки"с "жёлтым"ядром и сопряжёнными "белыми лепестками—дополнениями [49], предполагалось, что они будут тоже устроены не очень сложно. Но как оказалось, дополнениями в периодических группах Фробениуса могут быть некоторые центральные расширения групп "бернсайдова"типа [49], а в ядро подходящей группы Фробениуса можеть быть изоморфно вложена любая наперёд заданная группа [5]. Ограниченная проблема Бернсайда в классе групп Фробениуса также решается отрицательно ([49], теорема 5.1). Всё это говорит о том, что бесконечные группы Фробениуса обьект для изучения потенциально сложный и для его эффективного исследования необходимы дополнительные ограничения.

Изучая пары Фробениуса с инволюциями В.П. Шунков пришёл к понятию конечно вложенной инволюции и получил ряд результатов о группах, обладающих такими инволюциями [34].

Цель работы. Получить характеризации черниковских групп по централизаторам элементов простого порядка. Изучить группы с черниковскими централизаторами элементов. Исследовать группы, содержащие бесконечные системы фробениусовых подгрупп. Обобщить теоремы Фробениуса, Шмидта, Блекберна, Шункова и Созутова на группы с конечными и обобщённо конечными элементами.

Общая методика исследований. Применяются методы теории групп.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер, её результаты и методы могут применяться в дальнейших исследованиях бесконечных групп с условиями конечности и групп с инволюциями.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Всесоюзной алгебраической конференции (Ленинград, 1981), на Всесоюзном симпозиуме по теории групп (Москва, 1984), на международных конференциях по алгебре (Новосибирск, 1989, 1991, 2000; Красноярск, 1993, 2002; Санкт-Петербург, 1997, 2002; Тула, 2003; Москва, 2004; Иркутск, 2004; Екатеринбург, 2005), на международных конференциях по математике и механике (Красноярск, 1998, 2000, 2002; Томск, 2003), на международных конференциях "Мальцевские чтения"(Новосибирск, 1998 – 2004). Они обсуждались на заседаниях семинаров "Алгебра и логика", "Теория групп"(ИМ СО РАН и НГУ), на семинаре кафедры алгебры МГУ, на Красноярском городском алгебраическом семинаре.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [39]-[54].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, списка литературы (90 наименований) и изложена на 134 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основные результаты диссертации:

- получено описание строения сечений произвольной p-группы с черниковским централизатором некоторого элемента; показано, что существует континуальное множество не черниковских групп с указанным условием;

- дана характеризация черниковских p-групп как примарных групп с черниковским централизатором почти конечного элемента;

- описано строение группы с H-фробениусовым элементом чётного порядка, тем самым дан ответ на вопрос 10.61 Созутова для любого элемента чётного порядка;

- получено решение второй части вопроса 10.61 из Коуровской тетради для всех элементов a, за исключением случая, когда их порядок равен 3 и 5;

- получены обобщения теоремы Фробениуса и теоремы Шункова о группах с конечно вложенной инволюцией на достаточно широкий класс групп с инволюциями.

К другим важным результатам, имеющим самостоятельный интерес можно отнести следующие:

- доказано, что примарная группа, обладающая обобщённо конечным элементом простого порядка с черниковским централизатором, является черниковской группой;

- получена характеризация черниковских групп без инволюций как групп с почти регулярным почти конечным элементом a простого порядка p, в которых абелевы a-инвариантные подгруппы удовлетворяют условию минимальности;

- доказано, что если группа G содержит H-фробениусовый элемент a порядка 4 из H, то объединение всех ядер фробениусовых подгрупп группы G, с дополнением, содержащим элемент a, является периодической абелевой нормальной в G подгруппой;

- получена характеризация некоторых обобщённо конечных групп Фробениуса.

Далее — более точно и подробно по главам.

Глава 1. В главе сформулированы основные известные результаты, используемые в доказательствах диссертации.

Глава 2. В главе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G – p-группа, a – ее элемент простого порядка p и $C_G(a)$ – черниковская группа. Тогда либо G – черниковская группа, либо G обладает не локально конечным сечением по черниковской подгруппе, в котором максимальная локально конечная подгруппа, содержащая образ элемента a, единственна.*

Отметим, что первой части альтернативы теоремы 1 удовлетворяет счетное множество групп, поскольку множество черниковских p-групп счетно. Используя методы А.Ю. Ольшанского [15] доказана следующая теорема существования.

Теорема 2. *Пусть $\{G_i\}_{i\in I}$ – конечное или счетное множество неединичных конечных или черниковских p-групп, $|I| \geq 2$, $p > 2$ и $n_0 = p^k$ – достаточно большое число. Тогда свободная амальгама X групп G_i вложима в простую группу $G = G(\infty)$, со следующими свойствами:*

1. *Всякая собственная подгруппа в G является или циклической группой порядка, делящего n_0 или содержится в подгруппе, сопряженной с некоторой из групп G_i;*
2. *Если $a \in G_i^{\#}$ для некоторого $i \in I$ и $b \notin G_i$, то $G = \langle a, b\rangle$;*
3. *Мультипликатор Шура группы G является свободной абелевой группой счетного ранга;*
4. *Для любой абелевой конечной или черниковской группы Z существует нерасщепляемое центральное расширение группы G с помощью подгруппы Z, удовлетворяющее вместе с каждым своим нецентральным элементом второй части альтернативы теоремы 1.*
5. *Если в первоначальный список групп $\{G_i\}_{i\in I}$ включить группы из пункта 4, то теорема также будет верна.*

Более определённые утверждения получены в двух следующих теоремах главы (теоремы 3 и 4).

Теорема 3. *Примарная группа G, обладающая обобщенно конечным элементом a простого порядка p с черниковским централизатором $C_G(a)$, является черниковской группой.*

Теорема 4. *Пусть G — p-группа, H — собственная подгруппа из G и a — почти H-конечный элемент простого порядка с черниковским централизатором $C_G(a)$. Тогда G — черниковская группа.*

Результаты второй главы опубликованы в работах [39, 45, 53].

Глава 3 посвящена характеризациям произвольных черниковских групп без инволюций.

Теорема 5. *Пусть G — группа без инволюций, a — почти конечный почти регулярный элемент простого порядка из G такие, что любая периодическая a-инвариантная абелева подгруппа G удовлетворяет условию минимальности. Тогда G — черниковская группа.*

Когда $C_G(a)$ — бесконечная черниковская группа, то при дополнительных условиях также удаётся доказать, что исследуемая группа черниковская, или указать в группе черниковскую нормальную подгруппу (теоремы 6, 7).

В доказательствах этих теорем большую роль играли признаки непростоты групп Созутова-Шункова с (почти) H-фробениусовым элементом.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [40, 41, 42, 43, 54].

В главе 4 группы с системами фробениусовых подгрупп изучаются в чистом виде. В теории (локально) конечных групп теорема Фробениуса является одним из мощных средств исследования и представляет собой важный признак непростоты группы. В.П. Шунковым и А.И. Созутовым [19], [20], [21], [33] получен ряд признаков непростоты групп с системами фробениусовых подгрупп, играющих фундаментальную роль для групп с конечными элементами. Они определяют строение группы G с собственной подгруппой H, содержащей элемент a, для которого (почти) все подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ $(g \in G \setminus H)$ являются группами Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$. В следующих теоремах четвёртой главы устанавливаются признаки непростоты групп с системами фробениусовых подгрупп $\langle a, a^g \rangle$, неинвариантные множители которых не обязательно циклические.

По модулю упомянутого результата А.Х. Журтова и В.Д.Мазурова [7] доказана такая теорема.

Теорема 8. *Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа, a — H-фробениусовый элемент порядка 4 из H. Тогда объединение F всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением, содержащим элемент a, является абелевой периодической нормальной в G подгруппой и $G = FH$.*

Отметим, что конечность подгрупп вида $L_h = \langle a, a^h \rangle$, где $h \in H$, в этой теореме не предполагается, а доказывается. Теорема 8 даёт положительное решение вопроса 10.61 для $|a| = 4$.

Следующая теорема положительно решает вторую часть вопроса 10.61 для всех случаев, когда порядок элемента a отличен от 3 и 5.

Теорема 9. *Пусть G - группа, H - ее собственная подгруппа, a - конечный H-фробениусовый элемент порядка > 2 из H. Если $|a| \neq 3, 5$, то объединение F всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением, содержащим элемент a, является периодической нормальной в G подгруппой и $G = FH$.*

Теорема 10. *Если группа G содержит H-фробениусовый элемент a четного порядка > 2, то $G = F\lambda C_G(i)$, где i — инволюция из $\langle a \rangle$, а F — абелева периодическая подгруппа, инвертируемая инволюцией i.*

Заметим, что при условиях теоремы 10 подгруппы $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где $g \in G \setminus H$, могут быть и бесконечными. Известно ([49], теорема 5.1), что в периодической группе Фробениуса дополнение не обязано быть локально конечной группой, а его фактор-группа по локально конечному радикалу может оказаться, например, изоморфной свободной бернсайдовой группе или одному из монстров Ольшанского. Если в качестве группы G взять такую группу Фробениуса с дополнением H чётного периода и элемент a чётного порядка из H выбрать за пределами локально конечного радикала H, то тройка (G, H, a) будет удовлетворять всем условиям теоремы 10, при этом все подгруппы L_g будут бесконечными.

Из теоремы 10 вытекает положительный ответ на вопрос 10.61 [9] для случая, когда порядок элемента a чётен:

Следствие *Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа, $a \in H$, $|a| = 2n > 2$ и для всякого $g \in G \setminus H$ подгруппа $\langle a, a^g \rangle$ является фробениусовой группой с дополнением, содержащим a. Тогда объединение всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a \rangle$ есть нормальная в G подгруппа F и $G = FH$.*

Результаты четвёртой главы опубликованы в работах [44], [46]- [51].

В пятой главе представлены обобщения теоремы Фробениуса на классы групп с обобщённо конечными элементами и характеризации групп Фробениуса.

Напомню, что если H — собственная подгруппа группы G и $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$, то H называется *обособленной* в G. Если пересечения $H \cap H^g$ не содержат неединичных элементов конечного порядка при любом $g \in G \setminus H$, то H назовём *периодически обособленной* в G.

Теорема 11. *Если обобщенно конечная группа G содержит периодически обособленную подгруппу H с инволюцией, удовлетворяющую условию минимальности для нормальных подгрупп, то $G = F\lambda H$, где F — периодическая абелева группа.*

Следующую теорему можно рассматривать как характеризацию некоторых обобщённо конечных групп Фробениуса.

Теорема 12. *Если обобщенно конечная группа G содержит периодическую обособленную подгруппу H с инволюцией, удовлетворяющую условию минимальности для нормальных подгрупп, то G периодическая группа Фробениуса с абелевым ядром F и дополнением H.*

Пусть $J = J(G)$ — множество всех инволюций рассматриваемой группы G.

Теорема 13. *Пусть множество инволюций J группы G содержит конечную инволюцию, а G содержит обособленную подгруппу H с инволюцией, причем для некоторого смежного класса $Hg \neq H$ пересечение $J^2 \cap Hg$ конечно. Тогда все инволюции в G сопряжены, инволюция в H единственна, $\langle J \rangle$ — локально конечная группа Фробениуса с абелевым ядром F и $G = F\lambda H$.*

Из этой теоремы вытекает следующая характеризация (обобщение теоремы 2 из [34]):

Теорема 14. *Пусть G периодическая группа, (G, H) — пара Фробениуса, H содержит инволюцию i и $J = i^G$. Группа G тогда и только тогда является группой Фробениуса с дополнением H, когда для некоторого смежного класса $Hg \neq H$ пересечение $J^2 \cap Hg$ конечно.*

Теоремы 13 и 14 обобщают теоремы В.П. Шункова о группах с конечно вложенной инволюцией.

Результаты пятой главы опубликованы в работах [49, 52].

Теоремы 10 – 14 получены в нераздельном и равном соавторстве с А.И. Созутовым.

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту А.И. Созутову за сотрудничество, постоянное внимание и всестороннюю помощь. Благодарю своего первого научного руководителя В.П. Шункова за неослабевающий интерес к моей работе. Я благодарен зав. кафедрой М.В. Носкову и всему коллективу кафедры прикладной математики Красноярского государственного технического университета за поддержку, а также Российскому фонду фундаментальных исследований и Красноярскому краевому фонду науки за финансовую поддержку.

Список литературы

[1] Адо И.Д. Локально конечные p-группы с условием минимальности для нормальных делителей. – Докл. АН СССР, 1946, т. 54. с. 465 – 478.

[2] Адо И.Д. Доказательство счетности локально конечной p-группы с условием минимальности для нормальных делителей. – Докл. АН СССР, 1947, т. 58, с. 523 – 524.

[3] Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

[4] Адян С.И. Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами. – Успехи мат. наук, 1977. Т. 32, N 1, с. 3 15.

[5] Блудов В. В. О группах Фробениуса// Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38. N 6. С. 1219—1221.

[6] Горчаков Ю. М. О бесконечных группах Фробениуса// Алгебра и логика. 1965. Т. 4. N1. С. 15—29.

[7] Журтов А.Х., Мазуров В.Д. О группах Фробениуса, порождённых квадратичными элементами// Алгебра и логика.– 2003.– Т.42, N 3. С. 271-292.

[8] Каргаполов М.И. О проблеме О.Ю. Шмидта. – Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, с. 232 – 235.

[9] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. Изд-е 15-е. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002.

[10] Мальцев А.И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами. – Матем. сб., 1940, т. 8, с. 405 – 422.

[11] Мерзляков Ю.И. Матричное представление групп внешних автоморфизмов черниковских групп. – Алгебра и логика, 1969, т. 8, N4, с. 478 – 482.

[12] Мухаммеджан Х.Х. О группах с возрастающим центральным рядом. – Матем. сб., 1951, т. 28, с. 185 – 196.

[13] Мягкова Н.Н. О группах конечного ранга. – Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, т. 13, с. 495 – 512.

[14] Ольшанский А.Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков// Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1980.– Т. 44, N 2.– С. 309-321.

[15] Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

[16] Остыловский А.Н. Локальная конечность некоторых групп с условием минимальности для абелевых подгрупп. – Алгебра и логика, 1977, т. 16, N1, с. 63 – 73.

[17] Сенашов В.И., Созутов А.И., Шунков В.П. Исследования групп с условиями конечности в Красноярске// Успехи мат. наук, 2005, Т. 60, выпуск 5, с. 3 – 48.

[18] Созутов А. И., Шунков В.П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы// Матем. сб. 1976. Т. 100. N4. С. 495—506.

[19] Созутов А.И. О группах с фробениусовыми парами сопряженных элементов// Алгебра и логика. 1977. Т.16. N2. С. 204—212.

[20] Созутов А.И., Шунков В.П. О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами. – Алгебра и логика, 1977, т. 16, N6, с. 711 – 735.

[21] Созутов А.И. О группах с классом фробениусово-абелевых элементов// Алгебра и логика. 1995. Т. 34. N5. С. 531—549.

[22] Старостин А.И. О группах Фробениуса// Укр. матем. журн. 1971. Т. 23. N5. С. 629—639.

[23] Сучкова Н.Г., Шунков В.П. О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп. – Алгебра и логика, 1986, т. 25, N4, с. 445 – 469.

[24] Черников С.Н. Бесконечные локально разрешимые группы. – Матем. сб., 1940. т. 7, с. 35 – 64.

[25] Черников С.Н. К теории бесконечных специальных групп. – Матем. сб., 1940, т. 7, с. 539 – 548.

[26] Черников С.Н. О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп. – Матем. сб., 1951, т. 28, с. 119 – 129.

[27] Черников С.Н. О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами. – Матем. сб., 1960, т. 52, с. 647 652.

[28] Шленкин А.К. Группы Шункова с условием примарной минимальности. I, II, III// Siberian. Adv. Math. – 1998.– Т. 8; №№3, 4, 6. С. 114 – 131, 50 – 74, 109 – 133.

[29] Шмидт О.Ю. Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп// В сб. Избранные труды. Математика.– М.– 1959.– С. 298-300.

[30] Шунков В.П. О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы// Алгебра и логика. 1967. Т. 6. N3. С. 113—124.

[31] Шунков В.П. Об одном классе p-групп. – Алгебра и логика, 1970, т. 9, N4, с. 484 – 496.

[32] Шунков В.П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп. – Алгебра и логика, 1970, т. 9, N5, с. 579 – 615.

[33] Шунков В.П. Об одном признаке непростоты групп// Алгебра и логика. 1975. Т. 14. N5. С. 491–522.

[34] Шунков В.П. Группы с конечно вложенной инволюцией// Алгебра и логика. 1990. Т. 29. N1. С. 102—123.

[35] Aschbacher M. A class of generalized TI-groups// Ill. J. Math. 1974. V. 18, N3. P. 418—426.

[36] Blackburn N. Some remarks on Cernikov p-groups. – Ill JMath., 1962, v. 6, p. 421 – 431.

[37] Fischer B. F-Gruppen endlicher Ordnung// Arch. Math. 1965. B. 16. S. 330–336.

[38] Fischer B. Frobeniusautomorphismen endlicher Gruppen // Math. Ann. 1966. B. 163. S. 273–298.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[39] Попов А.М. Об одном классе p-групп с (a, a)-условием конечности// В сб. науч. тр. "Вопросы теории алгебраических систем".– Караганда.– 1981.- С. 93 – 107.

[40] Попов А.М. К вопросу о характеризации черниковских групп, обладающих почти регулярным элементом простого порядка// Красн. политехн. инст. – Красноярск.– 1985.– Деп. в ВИНИТИ 02.10.1985, N 7327-85.– С. 1-24.

[41] Попов А.М., Шунков В.П. Характеризация одного класса черниковских групп// Алгебра и логика.– Т. 26, N3.– 1987.– С. 358 – 375.

[42] Попов А.М. Об одной характеризации черниковских групп в классе групп без инволюций// Красн. политехн. инст. – Красноярск.– 1988. Деп. в ВИНИТИ 19.04.1988, N 2947-88.– С 1-26.

[43] Попов А.М., Шунков В.П. Дополнение к статье "Характеризация одного класса черниковских групп"// Алгебра и логика.– Т. 29, N1.– 1990.– С. 124 – 125.

[44] Попов А.М. О группах с H-фробениусовым элементом порядка 4// Симметрия и дифференциальные уравнения. Труды Международной крнференции.– Красноярск – 2000.– С. 174-177.

[45] Попов А.М. О p-группах с черниковским централизатором неединичного Алгебра и логика.– Т. 40, N3.– 2001.– С. 330-343.

[46] Попов А.М. Об одном признаке непростоты групп с инволюциями// Алгебра и логика.– Т. 42, N2.– 2003.– С. 227-236.

[47] Попов А.М., Созутов А.И. О группах с фробениусовыми элементами// В сб. Труды XXI межрегион. науч.-техн. конф. "Математика".- Красноярск: КрасГАСА.- 2003.- С. 3-20.

[48] Попов А.М. О строении некоторых групп с конечным H-фробениусовым элементом// Алгебра и логика.– Т. 43, N2.– 2004.– С. 220-228.

[49] Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П. Группы с системами фробениусовых подгрупп.– Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 212 С.

[50] Попов А.М., Созутов А.И. О группах с H-фробениусовым элементом чётного порядка// Алгебра и логика.– Т. 44, N2.– 2005.– С.

[51] Popov A.M. On Groups with Frobenius Elements// Acta Applicandae Mathematicae.– V. 85.– 2005.– P. 257-264.

[52] Попов А.М., Созутов А.И. Обобщённо конечные пары Фробениуса// Математические системы.– Вып. 3.–Красноярск: КрасГАУ.– 2005.– С. 62-67.

[53] Попов А.М. О p-группах с обобщённо конечным элементом//Сибирские электронные математические известия.– Том 3(2006).– С. 89-91.

[54] Попов А.М. О некоторых группах с почти регулярным элементом простого порядка//Сибирские электронные математические известия.– Том 3(2006).– С. 86-88.

Отпечатано в ИПЦ КГТУ. Тираж 120 экз. Заказ 684/2
660074, Красноярск, ул. Киренского, 28