РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи

ЧЕХОВ Леонид Олегович

Матричные модели и геометрия пространства модулей

специальность 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

МОСКВА
2000

Работа выполнена в отделе квантовой теории поля Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук (МИАН).

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук А. А. Белавин

доктор физико-математических наук И. В. Тютин

доктор физико-математических наук Г. Б. Шабат

Ведущая организация:

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В А Стеклова Российской Академии Наук (ПОМИ РАН).

Защита диссертации состоится « 19 » октября 2000 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.38.01 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук по адресу Москва, ул. Губкина д. 8, Математический институт РАН

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института РАН.

Автореферат разослан « 11 » сентября 2000 года

Ученый сектретарь
диссертационного совета
Д.002.38.01 МИАН
доктор физ.-мат. наук, профессор

Дрожжинов
Ю. Н Дрожжинов

Актуальность темы

Основной мотив, побуждающий к исследованию матричных моделей, – это развитие непертурбативных методов в теории струн. Струнная теория допускает целую серию пертурбативные вакуумов, описываемых двумерными конформными теориями поля (КТП). Для того, чтобы каким-либо способом описывать переходы между этими вакуумами и конечные флуктуации струнной теории, необходимо отказаться от описания теории на уравнениях движения и рассмотреть континуальный интеграл по всем двумерным метрикам.

Основная проблема квантовой теории струны Полякова – это вопрос о правильном определении меры интегрирования в интеграле по метрикам двумерной гравитации. В решении этой проблемы как раз и помогают матричные модели. Первичная мотивация использования матричных моделей сводится к нахождению теорий, проявляющих свойства физической гравитации. Среди этих свойств важнейшее – это *топологическая природа* струнного действия[1]. В случае, когда струнная теория не содержит выделенной метрики, корреляционные функции теории суть числа, зависящие лишь от (дискретного) набора полей и топологических характеристик (род, число вставок полей либо выколотых точек) двумерной поверхности. При этом после устранения калибровочных степеней свободы, которые в случае двумерной гравитации представляют собой конформные преобразования метрики, остающиеся степени свободы – это переменные пространства модулей комплексных структур.

Матричные модели не только воспроизводят все известные результаты, полученные в рамках топологической или непосредственно физической гравитации, они позволяют решить модель точно, т.е. найти произвольную корреляционную функцию на римановой поверхности (РП) произвольного рода.

Развитие конформных теорий поля, теории некритических струн и интегрируемых моделей привело к идее использовать матричные модели более сложного вида (для начала – эрмитовы одноматричные модели с более сложными потенциалами) для описания критических явлений в теориях двумерной гравитации с материей. При этом было обнаружено, что выбирая матричные модели с потенциалами старших порядков и видоизменяя предельную процедуру таким образом, чтобы "ведущие" вклады, характерные для чистой гравитации, сокращались, можно получить корреляторы со старшими критическими индексами (аномальными размерностями). Для получения таких корреляторов была разработана достаточно сложная технически процедура *двойного скейлингового предела.*

Одновременно с этим возникло понимание того, что интегралы матричных моделей, выраженные через соответствующие времена, подчиняются уравнениям интегрируемых иерархий (более точно, эти интегралы суть τ-функции иерархий Кадомцева–Петвиашвили для интегралов с внешним полем, иерархий полубесконечной цепочки Тоды для одноматричных моделей и т.д). Виттен [2] выдвинул гипотезу, что двойной скейлинговый предел одноматричной модели, задающий производящую

[1] E Witten, Nucl Phys , B340 (1990) 281-332
[2] E Witten, *Surv Diff Geom* 1 (1991) 243–310

функцию для корреляторов двумерной топологической гравитации с материей, подчиняется уравнениям Кортевега–де Вриза. В развитие этой гипотезы М.Концевичем был открыт новый тип матричных моделей [3] вида

$$\frac{1}{Z_0}\int DX \exp\left\{\operatorname{tr}\frac{1}{2}\Lambda X^2 + \frac{1}{6}X^3\right\}, \tag{1}$$

(Z_0 - некоторая нормировка), которые содержат внешнее матричное поле Λ и непосредственно описывают предельную непрерывную топологическую теорию, заданную на *пространстве модулей* $\mathcal{M}_{g,n}$ комплексных кривых. Эта модель позволила достичь замечательных результатов – с помощью элементарных методов стало возможным вычислить такие весьма сложные топологические характеристики пространств модулей, как индексы пересечений – интегралы по пространствам модулей от первых классов Черна.

Поскольку ни в подходе триангуляций, ни в подходе Концевича комплексная структура римановых поверхностей не играет роли, можно рассматривать различные обобщения этих подходов, сохраняющие свойства топологичности и интегрируемости. Поэтому важной задачей представляется исследование различных общих структур, свойственных матричным теориям и объединяющих разнообразные физические модели в классы универсальности, отвечающие матричным моделям

Возникает вопрос: если полученные в подходе Концевича *классические* интегралы отвечают корреляционным функциям *квантовой* теории на непрерывном пространстве–времени, то нет ли способа каким-либо образом дискретизовать либо проквантовать само пространство–время? Идеи некоммутативной геометрии [4] подсказывают идею найти какие-либо деформации структур пространств модулей, которые бы сохраняли свойства интегрируемости и в той или иной мере – свойство топологичности. Возможный вид такой деформации подсказывается конструкцией Воеводского и Шабата [5], восходящей к идеям Гротендика. В этой конструкции, связанной с т.н. арифметическими униформизациями римановых кривых и функциями Белого, уже появляется идея *дискретизовать* пространство модулей произвольной алгебраической кривой с помощью графов ("детских рисунков"). Однако прямые вычисления функций Белого оказываются чрезвычайно сложными даже в самых простых случаях и возникает задача дать какое-либо явное описание инвариантных структур на получающихся (дискретизованных) пространствах.

В настоящей работе исследуется новый класс матричных моделей, обусловленный своим возникновением новым математическим объектам – дискретизованным пространствам модулей, введенными автором, и устанавливаются явные соотношения между моделями этого класса и матричными моделями дискретных и непрерывных римановых поверхностей. Эти новые модели также содержат дополнительную информацию о пространствах модулей, а именно об особенностях (редукциях) пространств модулей.

[3] М. Л. Концевич, *Функц. Анал. Приложен.*, 25 (1991) 50–57

[4] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994

[5] В А. Воеводский и Г Б. Шабат, *ДАН СССР*, 304, вып 2, 265–268

Интегрируемые системы в струне возникают, если проинтегрировать некоторые τ-функции по универсальному пространству модулей Возникающие квантовые системы разделяются на два класса в зависимости от того, задаются ли классические интегрируемые системы временами (константами связи) или переменными Мивы, построенными из собственных значений внешней бесконечной (в пределе $N \to \infty$) матрицы.

Оба варианта реализуются в матричных моделях: в работах группы исследователей из ИТЭФ и ФИАН было показано, что статистическая сумма дискретной матричной модели – это τ-функция, времена которой – константы связи, в то время как статистическая сумма непрерывной матричной модели это τ-функция, зависящая от внешней матрицы, задающей переменные Мивы. В данной работе устанавливается взаимосвязь этих двух теорий и показывается, что они могут быть реализованы как частные случаи непрерывных матричных моделей с внешним полем и с потенциалами, содержащими логарифмические члены. При этом оказывается, что модель, эквивалентная дискретной (одноматричной) эрмитовой модели, и есть матричная модель, отвечающая дискретизованным пространствам модулей.

Интегрируемые иерархии допускают множество решений Инвариантное условие, выделяющее нужное решение – это *струнное уравнение*. После наложения этого единственного дополнительного условия матричный интеграл становится однозначно определенным и возникает полубесконечная алгебра связей типа Вирасоро или W, накладываемых на этот интеграл. Эта алгебра связей на самом деле есть набор тождеств Уорда для данной модели, отвечающих вариациям констант связи. В то время как в теории поля тождества Уорда не задают динамику полностью, в матричных моделях они *эквивалентны* уравнениям движения.

Матричная модель с произвольным потенциалом $P(Y)$, задаваемая интегралом по эрмитовым матрицам Y размера $M \times M$:

$$\int_{M\times M} \exp(\operatorname{tr} P(Y))DY, \tag{2}$$

где $P(Y) = \sum_n \xi_n \operatorname{tr} Y^n$, а ξ_n называются *временами* одноматричной модели, была точно решена в двойном скейлинговом пределе (д.с.п.), в котором преобладающий вклад дают разбиения с числом граней, стремящимся к бесконечности, а сингулярные метрики аппроксимируют "случайную метрику" на римановой поверхности: в этом пределе и появляются уравнения иерархии Кортевега–де Вриза (КдВ), а статистическая сумма двумерной гравитации задается степенным разложением по счетному числу переменных и она совпадает с логарифмом некоторой τ-функции иерархии КдВ [6] Вместе с тем возникает вопрос о *точном* вычислении интеграла (2) в рамках разложения по родам. Хотя модель (2) была основной моделью, исследуемой в матричных теориях [7],[8], вычисления сводились к нахождению предела статистической суммы при $N \to \infty$ и нахождению нескольких первых поправок по $1/N^2$ для

[6] Yu Makeenko, A Marshakov, A Mironov, and A Morozov, *Nucl Phys* B356 (1991) 574–628
[7] E Brézin, C Itzykson, G Parisi, and J-B Zuber, *Commun Math Phys* 59 (1978) 35
[8] M L Mehta, *Random Matrices*, 2nd edn, Academic Press, New York, 1991

каких-либо фиксированных потенциалов; последовательного способа вычислить поправки старших родов не существовало. Этот способ, связанный с т.н. *техникой моментов*, разработан автором. Матричную модель можно считать "точно решаемой", если ее статистическая сумма может быть в каждом роде (порядке $1/N^2$-разложения, где N – размер матриц) представима как рациональная функция от некоторых *новых переменных* (моментов), выражающихся через исходные переменные (времена). В матричной модели Концевича моменты вводились через решения уравнений КдВ [9], что оказывается невозможным в теории эрмитовых матриц и надо разрабатывать новую рекуррентную процедуру, связанную с *петлевыми уравнениями*, возникающими как следствие тождеств Уорда.

Исследование этих тождеств оказывается актуальным, поскольку приводит к установлению целого ряда новых неожиданных соотношений между различными дискретными и непрерывными матричными моделями, связанными различными явными преобразованиями времен. Первое соотношение такого рода, доказанное автором с помощью тождеств Уорда и впоследствии нашедшее τ-функциональное объяснение [10], устанавливает эквивалентность матричной модели, описывающей дискретизованное пространство модулей и эрмитовой одноматричной модели с произвольным потенциалом. В более сложных случаях τ-функциональный подход не позволяет получить ответ и метод, использующий тождества Уорда (уравнения Швингера–Дайсона) оказывается наиболее мощным способом исследований, позволяющим, в частности, существенно упростить процедуру д.с.п.

В самое последнее время интерес к матричным моделям вновь оживился в связи с матрично-модельной формулировкой М-теории [11],[12], которая, как ожидается, описывает непертурбативный подход в теории суперструн. Соответствующий матричный интеграл [13] также сводится к модели с внешним полем и может быть решен с использованием методов, развиваемых в диссертации.

Цель работы

Вычисление индексов пересечений на дискретизованном пространстве модулей с помощью техники матричных моделей. Исследование нового класса матричных моделей с внешним полем и неполиномиальными потенциалами. Разработка методов вычислений и установление взаимосвязей между матричными моделями, относящимися к различным классам.

Методика исследования

В работе используются методы когомологического анализа дискретных комплексов де Рама, матрично-модельного интегрирования, алгебры Вирасоро, развивается метод вычислений матричных интегралов с помощью петлевого уравнения, метод

[9] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Int. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 5661–5705

[10] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov, *Nucl. Phys.* **B397** (1993) 339–378

[11] T. Banks, W. Fischler, S. H. Shenker, and L. Susskind, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5112–5128

[12] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, and A. Tsuchiya, *Nucl. Phys.* **B498** (1997) 467–491

[13] A. Fayyazuddin, Y. Makeenko, P. Olesen, D. J. Smith, and K. Zarembo, *Nucl. Phys.* **B499** (1997) 159–182

уравнений Швингера–Дайсона в применении к матричным моделям.

Научная новизна

Перечислим основные результаты диссертации.

1. Предложена дискретизация пространств модулей комплексных кривых с выколотыми точками, униформизованных по Штребелю, и введена матричная модель с внешним полем (модель Концевича–Пеннера), описывающая индексы пересечений на этих кривых. Введены времена, отвечающие дискретизованным пространствам модулей.

2. Матричная модель эрмитовых матриц с произвольным (полиномиальным) потенциалом решена в разложении по родам в технике моментов. Найдена рекуррентная процедура, позволяющая получить ответ в произвольном роде.

3. Доказана эквивалентность матричной модели Концевича–Пеннера и эрмитовой одноматричной модели; времена моделей связаны преобразованием Мивы.

4. С помощью доказанной эквивалентности показано, что двойной скейлинговый предел эрмитовой одноматричной модели с произвольным (несимметричным) потенциалом дает модель Концевича; при этом половина моментов одноматричной модели переходит в моменты модели Концевича.

5. С помощью анализа уравнений Швингера–Дайсона матричной модели Концевича–Пеннера, представленной через времена дискретизованных пространств модулей, доказано, что статистическая сумма этой модели вне двойного скейлингового предела представляется каноническим преобразованием (осуществляемым дифференциальным оператором второго порядка) от произведения статистических сумм двух моделей Концевича взятых при различных временах.

6. Решена матричная модель струны IIB (модель с нелинейным действием Борна–Инфельда); вне точки, отвечающей модели Брезана–Гросса–Виттена, доказана ее эквивалентность матричной модели Концевича (т.е. найдено явное преобразование времен, связывающее эти две модели).

7. Решена матричная модель с внешним полем и двулогарифмическим потенциалом; доказана ее эквивалентность эрмитовой одноматричной модели, или модели Концевича–Пеннера (найдено явное преобразование времен, связывающее эти две модели).

8. В ведущем порядке по N решена матричная модель типа $O(n)$ с четвертичным взаимодействием; найдены соответствующие критические кривые и критическое поведение.

9. Решена модель ортогональных матриц типа модели Пеннера, описывающая виртуальные эйлеровы характеристики пространств модулей неориентированных кривых.

Основные результаты диссертации являются новыми

Практическая и теоретическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в теории квантовых интегрируемых систем и топологических теориях. Явные решения матричных моделей в терминах моментов теперь широко используются при вычислениях в теории случайных матриц и ортогональных полиномов

Апробация работы

Результаты диссертации рассказаны и обсуждены на многочисленных научных конференциях, в том числе, на международных конференциях, а также на ведущих научно-исследовательских семинарах как в России, так и за рубежом В частности.

1) на международной конференции ПОМИ-Флоренция (С. Петербург, 1997),
2) на международной конференции "Интегрируемые системы" (Кортона, Италия, 1993);
3) на международной конференции "Новые методы в квантовой теории поля" (Вендиш-Риц, Германия, 1994);
4) на международных конференции "Конформная теория поля и интегрируемые модели" (Черноголовка, 1997,1998);
5) на международной конференции "Избранные главы математической физики" (Копенгаген, Дания, 1998);
6) на семинарах отдела квантовой теории поля Математического института им В. А. Стеклова (Москва) под руководством А. А. Славнова;
7) на семинаре отдела алгебры Математического института им. В. А Стеклова (Москва) под руководством И. Р. Шафаревича;
8) на семинаре отдела геометрии и топологии Математического института им В. А. Стеклова (Москва) под руководством С. П. Новикова;
9) на семинарах института теоретической и экспериментальной физики под руководством А. Ю. Морозова;
10) на семинарах Лаборатории Теоретической Физики Объединенного Института Ядерных Исследований (Дубна);
11) на семинаре лаборатории теоретической физики и физики высоких энергии Университета Париж-6 и Ecole Normale Supérieure
12) на семинарах по теоретической физике Института Нильса Бора (Дания),
13) на семинаре по теоретической физике Императорского Колледжа (Лондон)

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в 14 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и двух приложений. Общий объем — 175 страниц книжного текста. Список литературы содержит 170 наименований.

Краткое содержание диссертации

В первой главе диссертации исследуется связь пространств модулей и матричных моделей.

Сначала дается обзор структур, возникающих при исследовании непрерывных пространств модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ комплексных кривых рода g с n проколотыми точками и с некоторой заданной гладкой компактификацией $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ типа Делиня–Мамфорда.

Обозначим через $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \ldots, n$ линейные расслоения над $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Слой расслоения $\mathcal{L}_i$ в точке $(C, x_1, \ldots, x_n)$ – это кокасательное пространство $T^*_{x_i}C$.

Пусть $d_1, \ldots, d_n$ – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \dim_{\mathbf{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = 3g - 3 + n;$$

тогда индекс пересечений или, в физических терминах, корреляционная функция топологической гравитации имеет вид

$$\langle \tau_{d_1} \ldots \tau_{d_n} \rangle_g = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \prod_{i=1}^{n} c_1(\mathcal{L}_i)^{d_i},$$

где $c_1(\mathcal{L}_i)$ – первые классы Черна соответствующих линейных расслоений над пространством модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Явный способ "координатизовать" пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ был предложен К Штребелем Чтобы установить соответствие между пространствами модулей алгебраических кривых и ленточными графами, снабдим ориентированный граф дополнительной структурой: присвоим каждому ребру положительное вещественное число $l_s \in \mathbf{R}^+$, где s – номер ребра. Эти числа l_s – длины ребер ленточного графа Γ_g рода g. Числа l_s задают координаты на $6g - 6 + 3n$-мерном линейном пространстве графов $\mathcal{M}^{comb}_{g,n}$. При этом периметры p_i – суммы длин ребер, инцидентных i-му циклу.

В случае точки пространства модулей общего положения все вершины трехвалентны и число ребер равно $6g - 6 + 3n$, т е. вещественной размерности пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ плюс n дополнительных измерений – периметров граней. Чтобы найти координаты на самом пространстве модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, нужно избавиться от этих дополнительных параметров.

Рассматривая совокупность всех графов с фиксированными g и n и всеми возможными (ненулевыми) длинами ребер, получим клеточное разбиение $\mathcal{M}_{g,n}^{comb}$ с размерностями клеток равными числу ребер соответствующего графа. (Клетки старшей размерности $6g-6+3n$ отвечают трехвалентным графам.)

М. Концевич предложил способ нахождения индексов пересечений на пространствах модулей. Чтобы вычислить индекс пересечений, надо рассмотреть $U(1)$-связности на граничных компонентах, отвечающих проколотым точкам. Под действием внешней производной $U(1)$-связность превращается в замкнутую 2-форму ω_i, определенную уже только на координатах базы $\mathcal{M}_{g,n}^{comb}$.

Обозначим через $\pi : \mathcal{M}_{g,n}^{comb} \to \mathbf{R}_+^n$ проекцию на пространство периметров. Теперь индексы пересечений задаются формулой:

$$\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle = \int_{\pi^{-1}(p_*)} \prod_{i=1}^{n} \omega_i^{d_i}, \tag{3}$$

где $p_* = (p_1, \dots, p_n)$ – произвольная последовательность положительных вещественных чисел и $\pi^{-1}(p_*)$ –слой $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ в $\mathcal{M}_{g,n}^{comb}$.

Рассматривая индексы (3) на открытых клетках старшей размерности пространства $\mathcal{M}_{g,n}^{comb}$ и производя непрерывное преобразование Лапласа относительно переменных p_*, можно получить теорему Концевича, утверждающую, что матричные интегралы по эрмитовым $N \times N$ матрицам, представленные в виде асимптотических разложений по временам $t_n = \frac{1}{2n+1} \operatorname{tr} \frac{1}{\lambda^{2n+1}}$ $n = 0, 1, 2, \dots$, $(-1)^{!!} \equiv 1$, суть производящие функции для топологических индексов пересечений:

$$\begin{gathered}
\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=1,\ g>0\\ n=3,\ g=0}}^{\infty} \frac{1}{(\alpha N)^{2g-2+n}} \sum_{\Sigma d_i = 3g-3+n} \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle_g \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^{n} (2d_i+1)!!\, t_{d_i} = \\
= \log \frac{\int DX\, e^{-\alpha N \operatorname{tr}\left(\frac{X^2\Lambda}{2} + \frac{X^3}{6}\right)}}{\int DX\, e^{-\alpha N \operatorname{tr} \frac{X^2\Lambda}{2}}} = \mathcal{F}_K(t_0, t_1, \dots) \equiv \log \mathcal{Z}_K(\{t_n\}, \alpha N), \\
\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Далее идут оригинальные результаты автора.

Введем *дискретизацию* пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ и $\mathcal{M}_{g,n}^{comb}$. При этом предполагаются разрешенными следующие значения параметров l_i.

$$l_i \in \mathbf{Z}_+ \cup \{0\}, \quad p_i \in \mathbf{Z}_+, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i \in 2\mathbf{Z}_+ \tag{5}$$

Таким образом, все l_i и p_i будут целыми, но некоторые из l_i могут обращаться в ноль, в то время как все периметры остаются строго положительными. Важно, что сумма всех периметров с необходимостью *четна*. Это (комбинаторное) пространство называется $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{disc}$. Следует отметить, что это пространство содержит и те точки исходного пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, которые являются *точками редукций* (сингулярные кривые) и кривизны (орбифолдные точки, стабильные при действии некоторой нееденичной подгруппы (стабилизирующей подгруппы) группы симметрий пространства Тейхмюллера) Рассматривая дискретные когомологии де Рама, получим аналоги всех непрерывных величин. Обозначим через $\tilde{\pi} : \overline{\mathcal{M}}^{disc}_{g,n} \to [\mathbf{Z}^n_+]_{even}$ проекцию на пространство периметров с ограничением $\sum_i p_i \in 2 \cdot \mathbf{Z}_+$. Тогда индексы пересечений в дискретном случае определяются как

$$\langle\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle\rangle_g = \int_{\tilde{\pi}^{-1}(p_*)} \prod_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i^{d_i}, \tag{6}$$

где $p_* = (p_1, \dots, p_n)$ – произвольная последовательность положительных целых чисел, $\sum_{i=1}^n p_i$ обязательно четна, $\tilde{\pi}^{-1}(p_*)$ – аналог сечения пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ в $\overline{\mathcal{M}}^{disc}_{g,n}$ и $\tilde{\omega}_i$ – дискретный аналог 2-формы ω_i. Заметим, однако, что объем слоя $\tilde{\pi}^{-1}(p_*)$ теперь не обязательно задается мономом (однороден) по p_i. Таким образом, новые индексы могут быть отличны от нуля и при $\sum_i d_i \le d \equiv 3g - 3 + n$.

Важно отметить, что каждое сечение $\tilde{\pi}^{-1}(p_*)$ содержит конечное множество точек; тем самым, эти сечения не изоморфны друг другу. Однако, все они – аналоги одного и того же исходного пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ с различными дополнительными периметрами. Поэтому естественно называть эти пространства *дискретизованными пространствами модулей* (д.п.м.). Соотношение (6) не зависит от числа точек исходного пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, входящих в сечение $\tilde{\pi}^{-1}(p_*)$ (это может быть даже единственная точка редукции, что имеет место, например, для $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$). Значения этих индексов пересечений – рациональные числа, что отражает орбифолдную природу исходного пространства модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Так как симметрийные свойства графов не изменились, значения старших когомологических классов не должны зависеть ни от значений периметров, ни от того, какое рассматривается пространство модулей – непрерывное или дискретное.

Для дискретизованного пространства модулей также можно определить производящую функцию, задаваемую матричным интегралом (при этом непрерывное преобразование Лапласа следует заменить на дискретное). Связь с матричной моделью усложняется необходимостью учитывать *эффекты вырождения* римановых кривых. Вырожденным (сингулярным) кривым невозможно сопоставить никакой граф и, следовательно, необходимо каким-либо образом "исключить" такие точки редукции из $\tilde{\pi}^{-1}(p_*)$. Пусть $\mathcal{M}^{disc}_{g,n}$ – такое подмножество $\overline{\mathcal{M}}^{disc}_{g,n}$, из которого выкинуты все точки редукции, и задача состоит в том, чтобы "выделить" интегрирование по открытому множеству $\mathcal{M}_{g,n}$ из полного интегрирования по $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Для этого используем *процедуру стратификации* по Делиню и Мамфорду. С помощью этой процедуры можно представить *открытое* пространство модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ в виде некоторой комбинации $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ и пространств модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g_j,n_j}$ низших размерностей

Геометрический смысл процедуры редукции состоит в последовательной перетяжке ручек поверхности. В общем случае получаются два типа редукции (не считая редукции, при которой "сливаются" две проколотые точки, выделяясь в отдельную сферу): в первом случае при перетяжке ручки получается поверхность рода $g - 1$ и две новых проколотых точки. Тем самым, пространство $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ редуцируется до $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$. Во втором случае перетяжка промежуточного цилиндра приводит к распаду римановой поверхности на две поверхности того же полного суммарного рода с двумя новыми проколотыми точками (по одной на каждой новой компоненте), и исходное пространство модулей $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ редуцируется до прямой суммы $\overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \oplus \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1}$, $g_1 + g_2 = g$, $n_1 + n_2 = n$. Полная комплексная размерность получившихся пространств всегда оказывается на единицу меньшей исходной размерности. В общем случае, получим, что $\mathcal{M}_{g,n}$ выражается через замкнутые пространства модулей следующим образом: надо взять альтернированную сумму

$$\mathcal{M}_{g,n} = \sum_{\substack{\text{редукции} \\ r_q=0}}^{3g-3+n} (-1)^{r_q} \oplus_{j=1}^{q} \overline{\mathcal{M}}_{g_j,n_j+k_j}, \tag{7}$$

идущую по всем q-компонентным редукциям, r_q – степень редукции и k_j – число дополнительных проколотых точек, возникающих благодаря редукциям[14].

Основной результат первой главы – это следующее утверждение.

Теорема 1.3. *В компактификационной схеме, совместной с параметризацией Штребеля пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$, асимптотическое разложение по временам*

$$T_k^{\pm} = \tfrac{1}{(k+1)!} \operatorname{tr} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \frac{1}{e^{\lambda} \pm 1} \tag{8}$$

имеет вид:

$$\sum_{g=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=1,\ g>0 \\ n=3,\ g=0}}^{\infty} \frac{1}{(\alpha N)^{2g-2+n}} \sum_{\substack{\text{редукции} \\ q-\text{компонентные}}} c_{g,n,r_q} \left(-\frac{1}{2}\right)^{|r_q|} 2^{1-q} \prod_{j=1}^{q} \Bigg\{ \sum_{\sum d_\xi = 3g_j - 3 + n_j + k_j} \frac{1}{n_j!} \times$$

$$\times \langle\langle \underbrace{\tau_{d_1} \dots \tau_{d_{n_j}}}_{n_j} \underbrace{\tau_0 \dots \tau_0}_{k_j} \rangle\rangle_{g_j} \left(\prod_{k=1}^{n_j} (2d_j + 1)!! T^{-}_{2d_j} + (-1)^{n_j} \prod_{k=1}^{n_j} (2d_j + 1)!! T^{+}_{2d_j} \right) \Bigg\} =$$

$$= \log \frac{\int DX\, e^{-\alpha N \operatorname{tr}\left(\frac{1}{4}\Lambda X \Lambda X + \frac{1}{2}\log(1-X) + \frac{1}{2}X\right)}}{\int DX\, e^{-\alpha N \operatorname{tr}\left(\frac{1}{4}\Lambda X \Lambda X - \frac{1}{4}X^2\right)}} = \mathcal{F}_{KP}(\{T_{2n}^{\pm}\}) \equiv \log \mathcal{Z}_{KP}(\{T_{2n}^{\pm}\}),$$

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_N}\}. \tag{9}$$

Здесь сумма идет по всем редукциям, c_{g,n,r_q} – положительные рациональные числа (коэффициенты редукции), $|r_q|$ – неотрицательные целые числа (степени редукции), $0 \le |r_q| \le 3g - 3 + n$, и, наконец, q – число компонент сингулярной кривой, q изменяется от 1 до $2g - 2 + n$. Вставки k_j дополнительных τ_0 в корреляционную функцию обусловлены этими редукциями.

В заключении первой главы дается краткий обзор модели Пеннера, задающей виртуальные эйлеровы характеристики пространств модулей, и содержатся два примера вычислений индексов на дискретизованных пространствах модулей – на $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$ и на некоторых первых членах разложения в роде два.

Во второй главе эрмитова одноматричная модель вычисляется в рамках разложения по родам.

В этой главе техника моментов применяется для нахождения вкладов старших порядков к многопетлевым (многоточечным) корреляторам и статистической сумме. Явно вычислены вклады до рода два (алгоритм вычислений хотя и регулярен, но

[14]Следует отметить, что проблема явного описания процедуры редукции в случае общего пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$, униформизованного по Штребелю, несмотря на многовариантность подходов к этой проблеме, так и не получила должного разрешения. Можно ожидать, что дискретные матричные модели позволят получить значимые результаты и в этой области.

достаточно сложен и ответы достаточно громоздки уже начиная с рода два; для их вычисления использовалась компьютерная программа MATHEMATICA) Вычислен двойной скейлинговый предел и получены явные ответы вплоть до четвертого рода. Доказана эквивалентность одноматричной модели и матричной модели Концевича в двойном скейлинговом пределе.

Эрмитова одноматричная модель (1MM) с произвольным потенциалом и матрицами размера $N \times N$ задается интегралом

$$\mathcal{Z}_H[g,N] = e^{N^2 F} = \int_{N\times N} d\phi \exp(-N \operatorname{tr} V(\phi)) \tag{10}$$

и допускает топологическое $1/N^2$-разложение.

Предлагаемый метод решения 1MM основан на петлевых уравнениях.

Производящий функционал (однопетлевое среднее)

$$W(p) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{\infty}\langle \operatorname{tr}\phi^k\rangle/p^{k+1} \tag{11}$$

и s-петлевой коррелятор ($s \geq 2$)

$$W(p_1,\dots,p_s) = N^{s-2}\sum_{k_1,\dots,k_s=1}^{\infty}\langle \operatorname{tr}\phi^{k_1}\dots\operatorname{tr}\phi^{k_s}\rangle_{conn.}/p_1^{k_1+1}\dots p_s^{k_s+1} \tag{12}$$

где $conn.$ относится с связной части, могут быть переписаны в виде:

$$W(p_1,\dots,p_s) = N^{s-2}\left\langle \operatorname{tr}\frac{1}{p_1-\phi}\dots\operatorname{tr}\frac{1}{p_s-\phi}\right\rangle_{conn.}. \tag{13}$$

Корреляторы получаются из свободной энергии F применением оператора вставки петли

$$\frac{d}{dV(p)} \equiv -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{p^{j+1}}\frac{d}{dg_j}. \tag{14}$$

Уравнение на многопетлевой коррелятор может быть переписано в виде:

$$W(p_1,\dots,p_s) = \frac{d}{dV(p_s)}\frac{d}{dV(p_{s-1})}\dots\frac{d}{dV(p_2)}W(p_1) \tag{15}$$

который показывает, что если однопетлевой коррелятор известен для *произвольного* потенциала, то можно вычислить все многопетлевые корреляторы.

В нормировке приведенной выше разложение по родам имеет вид:

$$W(p_1,\dots,p_s) = \sum_{g=0}^{\infty}\frac{1}{N^{2g}}W_g(p_1,\dots,p_s) \qquad (s\geq 1). \tag{16}$$

Аналогичное разложение по родам для свободной энергии дается формулой

$$F = \sum_{g=0}^{\infty}\frac{1}{N^{2g}}F_g. \tag{17}$$

Первое из цепочки петлевых уравнений 1ММ имеет вид

$$\oint_C \frac{d\omega}{2\pi i}\,\frac{V'(\omega)}{p-\omega}W(\omega) = (W(p))^2 + \frac{1}{N^2}W(p,p), \tag{18}$$

где $V(\omega) = \sum_j g_j \omega^j/j$ и C – кривая, окружающая сингулярные точки $W(\omega)$, но не точку $\omega = p$ Это контурное интегрирование действует как проектор, выделяющий коэффициент при члене p^{-1}. С использованием уравнения (15) второй член в правой части петлевого уравнения (18) может быть выражен через $W(p)$, так что (18) – замкнутое уравнение, задающее эту величину.

В ведущем порядке по $1/N^2$ можно выкинуть последний член в (18). Тогда решение с учетом того, что $W(p)$ ведет себя как $1/p$ при $p \to \infty$, имеет вид:

$$W_0(p) = \frac{1}{2}\oint_C \frac{d\omega}{2\pi i}\,\frac{V'(\omega)}{p-\omega}\left\{\frac{(p-x)(p-y)}{(\omega-x)(\omega-y)}\right\}^{1/2} \tag{19}$$

где x и y задаются потенциалом матричной модели:

$$\oint_C \frac{d\omega}{2\pi i}\,\frac{V'(\omega)}{\sqrt{(\omega-x)(\omega-y)}} = 0\,, \qquad \oint_C \frac{d\omega}{2\pi i}\,\frac{\omega V'(\omega)}{\sqrt{(\omega-x)(\omega-y)}} = 2\,. \tag{20}$$

При подстановке разложения по родам (16) в (18) получим, что $W_g(p)$ при $g \geq 1$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{\hat{K} - 2W_0(p)\right\} W_g(p) = \sum_{g'=1}^{g-1} W_{g'}(p)\, W_{g-g'}(p) + \frac{d}{dV(p)}W_{g-1}(p) \tag{21}$$

где $\hat{K}$ – линейный оператор,

$$\hat{K} f(p) \equiv \oint_C \frac{d\omega}{2\pi i}\,\frac{V'(\omega)}{p-\omega}f(\omega)\,. \tag{22}$$

В уравнении (21) $W_g(p)$ выражается только через такие $W_{g_i}(p)$, для которых $g_i < g$ Именно это позволяет развить итеративную процедуру.

Вводя новые переменные (моменты) M_k и J_k, которые характеризуют потенциал матричной модели вместо старых констант связи g_j:

$$M_k = \oint_C \frac{d\omega}{2\pi i}\,\frac{V'(\omega)}{(\omega-x)^{k+1/2}(\omega-y)^{1/2}} \qquad k \geq 1\,, \tag{23}$$

$$J_k = \oint_C \frac{d\omega}{2\pi i}\,\frac{V'(\omega)}{(\omega-x)^{1/2}(\omega-y)^{k+1/2}} \qquad k \geq 1\,, \tag{24}$$

получим, что эти моменты зависят от констант связи g_j как явно, так и через параметры x и y, определяемые уравнением (20), причем M_k и J_k явно зависят только от старших g_j с $j \geq k$

Вычисляя контурный интеграл в (19) с помощью взятия вычетов в точках $\omega = p$ и $\omega = \infty$, найдем:

$$W_0(p) = \frac{1}{2}\left\{V'(p) - M(p)\sqrt{(p-x)(p-y)}\right\}, \tag{25}$$

где $M(p)$ – полином от p степени на два меньшей, чем степень $V(p)$. Критическому поведению отвечает случай, когда один из корней $M(\lambda)$ стремится к x или y. В несимметричном потенциале m-ая мультикритическая точка отвечает случаю, когда на одном из концов – x или y – собирается $(m-1)$ дополнительных нулей. При этом

$$M_k \propto \left.\frac{d^{(k-1)}M(\lambda)}{d\lambda^{k-1}}\right|_{\lambda=x} \quad , \quad J_k \propto \left.\frac{d^{(k-1)}M(\lambda)}{d\lambda^{k-1}}\right|_{\lambda=y} \tag{26}$$

и условие m-ой мультикритической точки просто имеет вид $M_1 = M_2 = \ldots = M_{k-1} = 0$ и $M_k \neq 0$, если дополнительные нули собираются в точке x, и $J_1 = J_2 = \ldots = J_{k-1} = 0$, $J_k \neq 0$, если дополнительные нули собираются в точке y. Аналогично можно рассмотреть и более общую ситуацию, когда m дополнительных нулей собираются в точке x и n – в точке y.

Цель итераций петлевого уравнения —представить свободную энергию и корреляторы через моменты. При этом удобно ввести собственные вектора линейного оператора $\hat{K}$ и после довольно сложных комбинаторных вычислений доказывается следующее утверждение.

Итеративная процедура решения петлевого уравнения приводит к следующему представлению для вклада рода g в свободную энергию:

$$F_g = \sum_{\substack{\alpha_j>1,\\ \beta_i>1}} \langle \alpha_1 \ldots \alpha_s; \beta_1 \ldots \beta_l | \alpha, \beta, \gamma\rangle_g \frac{M_{\alpha_1}\ldots M_{\alpha_s} J_{\beta_1}\ldots J_{\beta_l}}{M_1^\alpha J_1^\beta d^\gamma} \quad g \geq 1\,, \tag{27}$$

где $d = x - y$ – расстояние между концами области распределения собственных значений, а скобки суть рациональные числа, в то время как α, β и γ – неотрицательные целые числа. Индексы $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_l$ принимают значения в интервале $[2, 3g-2]$ и сумма идет по всем наборам индексов. В частности, F_g зависит не более чем от $2 \times (3g-2)$ различных моментов На целые числа, входящие в формулу (27) возникают ограничения Обозначив через N_M и N_J соответствующие полные степени моментов M и J, получим

$$F_g: \qquad N_M + N_J = 2 - 2g\,, \tag{28}$$

$$F_g: \qquad \textstyle\sum_{i=1}^{s}(\alpha_i - 1) + \sum_{j=1}^{l}(\beta_j - 1) + \gamma = 4g - 4\,. \tag{29}$$

и неравенство

$$F_g: \quad \sum_{i=1}^{s}(\alpha_i - 1) + \sum_{j=1}^{l}(\beta_j - 1) \leq 3g - 3 \tag{30}$$

Для получения двойного скейлингового предела разработан алгоритм, позволяющий получать результаты прямо в д.с.п., что позволило найти корреляторы и статистическую сумму в д.с.п. до рода четыре включительно Анализ показывает, что в д.с.п. остается только следующая часть оператора вставки петель:

$$\frac{d}{dV(p)_x} = \sum_n \frac{dM_n}{dV(p)}\frac{\partial}{\partial M_n} + \frac{dx}{dV(p)}\frac{\partial}{\partial x} \quad (\partial.c\ n.) \tag{31}$$

где

$$\frac{dM_n}{dV(p)} = -(n+1/2)\left\{\Phi_x^{(n+1)}(p) - \frac{M_{n+1}}{M_1}\Phi_x^{(1)}(p)\right\} \quad (\partial.c.n.), \tag{32}$$

$$\frac{dx}{dV(p)} = \frac{1}{M_1}\Phi_x^1(p) \quad (\partial.c.n.) \tag{33}$$

и

$$\Phi_x^{(n)}(p) = (p-x)^{-n}\left\{d_c(p-x)\right\}^{-1/2} \quad (\partial.c.n.). \tag{34}$$

В случае симметричного потенциала петлевое уравнение реально распадается на два независимых уравнения, каждое из которых есть д.с.п петлевого уравнения для несимметричного потенциала – одно отвечает случаю критического поведения вблизи точки x, другое – вблизи точки y.

Покажем, что ММК может быть получена из 1ММ с помощью определенной *предельной процедуры*. В главе 3 показывается, что статистическая сумма 1ММ с $N = -\xi n$ представима в виде:

$$\mathcal{Z}_H[g, N(\xi)] = e^{-n\,\mathrm{tr}\,\Lambda^2/2} Z_P[\Lambda, n], \qquad N(\xi) = -\xi n \tag{35}$$

где статистическая сумма $Z_P[\mathcal{L}, n]$ есть статистическая сумма матричной модели с внешним полем $\mathcal{L} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$:

$$Z_P[\mathcal{L}, n] = \int_{n\times n} dX \exp\left[n\,\mathrm{tr}\left(\mathcal{L}X - \frac{1}{2}X^2 - \xi\log X\right)\right]. \tag{36}$$

Тождество выполнено, если набор констант связи $\{g\} = \{g_0, g_1, \ldots\}$ и собственные значения матрицы $\mathcal{L}$ связаны преобразованием Мивы

$$g_k = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,\mathcal{L}^{-k} - \delta_{k2} \qquad k \geq 1, \quad g_0 = \frac{1}{n}\mathrm{tr}\,\log\mathcal{L}^{-1}. \tag{37}$$

Полагая $\mathcal{L} = \sqrt{\xi}(\eta + \eta^{-1})$, можно представить $Z_P[\mathcal{L}, n]$ как статистическую сумму модели (9). В параметризации

$$\eta = e^{\varepsilon m}, \qquad \xi = \frac{1}{2\varepsilon^3} \tag{38}$$

где m следует отождествить с внешней матрицей M модели Концевича, в пределе $\varepsilon \to 0$ модель (1) получается из (9) после масштабного преобразования $X \to \varepsilon X$.

Для моментов M_k и J_k и для параметра d легко вывести следующие формулы для масштабного поведения:

$$J_k \to -2^{-(3k/2+1)}\varepsilon^{(3k+1)/2}I_0 + \delta_{k1}, \tag{39}$$

$$M_k \to -2^{(k-1)/2}\varepsilon^{-(k-1)/2}(I_k - \delta_{k1}), \tag{40}$$

$$d \to 2^{3/2}\varepsilon^{-3/2}. \tag{41}$$

где I_k моменты матричной модели Концевича (ММК).

Обратимся к общему выражению (27) для F_g. В нем степень параметра ε, стоящая при члене

$$\frac{M_{\alpha_1}\cdots M_{\alpha_s}J_{\beta_1}\cdots J_{\beta_l}}{d^{\gamma}M_1^{\alpha}J_1^{\beta}} \tag{42}$$

равна

$$[\varepsilon]=\sum_{i=1}^{l}\frac{3\beta_i+1}{2}-\sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha_j-1}{2}+\frac{3}{2}\gamma. \tag{43}$$

Из (29) следует, что $[\varepsilon]\geq 0$. Равенство $[\varepsilon]=0$ возможно тогда и только тогда, когда $l=0$, $\gamma=g-1$ и

$$\sum_{j=1}^{s}(\alpha_j-1)=3g-3. \tag{44}$$

Тем самым, выживают в точности те же члены, что и в общей процедуре д.с.п. Таким образом, получим, что коэффициенты $\langle\cdot\rangle_g^{herm}$, которые стоят при ненулевых моментах в д.с.п., равны индексам пересечений на пространствах модулей.

В заключение главы обсуждается матричная модель комплексных матриц и показано, что 1ММ и матричная модель комплексных матриц эквивалентны в д.с.п. (Вне д.с.п., очевидно, модели существенно различны.)

Третья глава посвящена уравнениям связей в матричных моделях.

Все статистические суммы рассматриваемых матричных моделей (в том числе с внешним полем) выражаются через соответствующие времена. Для 1ММ - это $\{\xi_n\}$ - коэффициенты при степенях матрицы X в потенциале $V(X)$ Для модели Концевича (1) набор времен дается всеми нечетными обратными степенями внешней матрицы Λ: $t_n=(2n-1)!!\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{\Lambda^{2n+1}}$. Наконец, для матричной модели (9) имеются два естественных выбора наборов времен (совершенно, впрочем. различной природы). Первый выбор – это два симметричных набора времен д.п.м

$$t_{2n}^{\pm}=\frac{1}{(2n+1)!}\frac{\partial^{2n}}{\partial\lambda^{2n}}\frac{1}{e^{\lambda}\pm 1}.$$

Другой выбор времен связан с интерпретацией модели (9) в духе обобщенных моделей Концевича. Вводя внешнее поле $\eta=e^{\lambda}+e^{-\lambda}$ и времена $\xi_n=\frac{1}{n}\,\mathrm{tr}\,\eta^{-n}-\frac{\alpha N}{4}\delta_{n,2}$ и сравнивая уравнения, получившиеся при вариациях времен, с *условиями Вирасоро*, накладываемыми на статистическую сумму Z_H одноматричной модели,

$$L_nZ_H(\{\xi_m\},M)\equiv\left\{\sum_{m=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_m}\frac{\partial}{\partial\xi_{n-m}}+\sum_{m=0}^{\infty}m\xi_m\frac{\partial}{\partial\xi_{n+m+1}}\right\}Z_H(\{\xi_m\},M)=0,\quad n\geq -1, \tag{45}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial\xi_0}Z_H(\{\xi_m\},M)\equiv -MZ_H(\{\xi_m\},M), \tag{46}$$

и операторы L_n образуют неаномальную часть алгебры Вирасоро:

$$[L_n,L_m]=(n-m)L_{n+m},\quad n,m\geq -1.$$

получим *точное* соотношение между интегралами моделей (9) и (2):

$$Z_{KP}(e^{\lambda}, \alpha N/2) = e^{\frac{\alpha N}{4}\operatorname{tr}\eta^2} Z_H(\{\xi_n\}, -\alpha N/2). \tag{47}$$

Следующая важная модель, активно исследуемая в последнее время – это матричная модель суперструны IIB, также называемая моделью NBI(=nonlinear Born–Infeld action), задаваемая действием

$$S_{\mathrm{NBI}} = -\frac{\alpha}{4}\operatorname{tr} Y^{-1}[A_\mu, A_\nu]^2 + \beta \operatorname{tr} Y - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]. \tag{48}$$

и статистической суммой

$$Z_{\mathrm{NBI}} = \int dA_\mu \, d\bar{\psi} \, d\psi \, dY \, (\det Y)^{-\gamma} \, e^{-S_{\mathrm{NBI}}}. \tag{49}$$

Интегрирование по матрице Y порождает эффективное действие и меру для поля Янга–Миллса A_μ и его суперпартнеров:

$$J(G) e^{-S_{eff}(G) + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\bar{\psi}\Gamma^\mu[A_\mu, \psi]} = \int dY \, (\det Y)^{-\gamma} \, e^{-S_{NBI}}, \quad G = -[A_\mu, A_\nu]^2. \tag{50}$$

Уже ответ в ведущем порядке по N дает основания сравнить эту модель с матричной моделью Концевича (1). Полный анализ уравнений Швингера–Дайсона дает ответ относительно асимптотического поведение модели

$$Z_{\mathrm{NBI}} = \int dX \, e^{-N \operatorname{tr}\left[X\Lambda + X^{-1} + (2\eta+1)\log X\right]}, \tag{51}$$

при больших Λ. В этом режиме параметры разложения – это следы от отрицательных степеней внешней матрицы Λ с некоторыми фиксированными сдвигами. Введем также новые *времена*, зависящие от переменных z_i, $\lambda_i = z_i^2 - (\eta + 1/2)^2$:

$$t_{n+1} = \frac{1}{2n-1}\sum_i \frac{1}{z_i^{2n-1}} + \delta_{n,0}\frac{N}{\eta + 1/2}, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{52}$$

Тогда с учетом нормировочного фактора

$$\exp\left\{-N\sum_i [2z_i - 2\eta\log(z_i + \eta + 1/2)] - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\log(z_i + z_j)\right\}, \tag{53}$$

после дополнительного сдвига всех старших времена, который оставляет несдвинутыми два первых времени t_1 и t_2:

$$\tilde{t}_k \equiv t_k - \frac{4\eta N}{(\eta + 1/2)^{2k+1}}\frac{1}{2(2k+1)}, \quad k \geq 3, \qquad \tilde{t}_{1,2} = t_{1,2}, \tag{54}$$

получившаяся алгебра связей оказывается в точности алгеброй Вирасоро связей матричной модели Концевича, что доказывает эквивалентность модели (51) и (1)

В выражениях для старших родов можно ввести замену переменных моментов, отвечающую сдвигам времен, что даст окончательный ответ в виде

$$
\begin{aligned}
(I_1 - 1) &\to a^{3/2}(J_1 + 2/\eta^2),\\
I_k &\to a^{k+1/2}(J_k + 2/\eta^{2k}),
\end{aligned}
$$

где I_k и J_k – соответственно моменты матричных моделей Концевича и NBI, и формула для разложения по родам модели NBI принимает вид:

$$F_g^{NBI} = \sum_{\sum_{k=2}(k-1)l_k = 3g-3} \langle \tau_2^{l_2}\tau_3^{l_3}\cdots\tau_{3g-2}^{l_{3g-2}}\rangle_g \frac{1}{(J_1+\frac{2}{\eta^2})^{2(g-1)+\sum l_p}} \prod_{k=2}^{3g-2} \frac{(J_k+\frac{2}{\eta^{2k}})^{l_k}}{l_k!}, \quad g>1 \tag{55}$$

и

$$F_1^{NBI} = \frac{1}{24}\log[a^{3/2}(J_1 + 2/\eta^2)]. \tag{56}$$

Следующая исследуемая модель – это двухлогарифмическая матричная модель с внешним полем

$$Z_{2-\log} = \int dX \mathrm{e}^{-N\,\mathrm{tr}[X\Lambda + \alpha\log(1-X) + \beta\log(1+X)]}, \tag{57}$$

содержащая теперь уже две константы связи α и β.

Анализ уравнений Швингера–Дайсона для интеграла (57) опять показывает, что эти уравнения образуют алгебру Вирасоро и после следующего преобразование времен:

$$\mathrm{tr}\frac{1}{\lambda^n} = \mathrm{tr}\frac{1}{\eta^n} + \left(-2\varphi\frac{N}{(-\xi)^n} + 2N\delta_{n,1} - N\delta_{n,2}\right), \tag{58}$$

где собственно времена

$$\tilde{t}_n(\xi,\varphi) = \frac{1}{n}\sum_i \frac{1}{\eta_i^n}, \tag{59}$$

$\varphi \equiv -(\alpha+\beta-1)/2$, а ξ – свободный параметр, получим уравнения связи, в точности совпадающие с уравнениями связи матричной модели (9). Поэтому имеет место точное соотношение между нормированными статистическими суммами указанных моделей:

$$\mathcal{Z}_{2-\log}\left[\left\{\frac{1}{n}\mathrm{tr}\frac{1}{\lambda^n}\right\}, \alpha, \beta\right] = C(\alpha,\beta)\xi^{2\varphi(\beta-1)N^2}\mathrm{e}^{N^2(2\beta-1)\xi}\mathcal{Z}_{\mathrm{KP}}\left[\tilde{t}_n(\xi,\varphi), \alpha_{\mathrm{KP}}\right]. \tag{60}$$

где

$$\mathcal{Z}_{2-\log}\left[\left\{\frac{1}{n}\mathrm{tr}\frac{1}{\lambda^n}\right\}; \alpha, \beta\right] = \frac{Z_{2-\log}[\lambda;\alpha,\beta]}{\prod_i\left\{(\lambda_i-\xi)^{N(\beta-1)}\mathrm{e}^{N(\lambda_i-\xi)}\right\}}. \tag{61}$$

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{KP}}\left[\tilde{t}_n(\xi,\varphi), \alpha_{\mathrm{KP}}\right] = \frac{Z_{\mathrm{KP}}[\eta(\xi,\varphi), \alpha_{\mathrm{KP}}]}{\prod_i\left\{(\eta_i)^{N\alpha_{\mathrm{KP}}}\mathrm{e}^{\frac{N}{2}\eta_i^2}\right\}}, \tag{62}$$

а $\alpha_{\mathrm{KP}} = \beta - 1$ и $C(\alpha,\beta)$ – некоторые постоянные, зависящие только от параметров α и β.

Аналогично можно получить выражения для старших родов через видоизмененные моменты 1ММ (или, эквивалентно, модели д.п.м.) и струнные восприимчивости

В четвертой главе устанавливаются точные соотношения между матричными интегралами Концевича–Пеннера и Концевича Технически это наиболее сложные и трудоемкие вычисления, приведенные в диссертации.

Сначала устанавливаются соотношения между моментами и переменными д.п.м Например, для момента M_k получим:

$$M_k = \frac{1}{N}\operatorname{tr}\frac{(e^{\lambda})^{k+1}}{\sqrt{\alpha}^{k+1}\left((e^{\lambda}-1)^2-\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}e^{\lambda}\right)^{k+1/2}\left((e^{\lambda}+1)^2-\frac{\iota}{\sqrt{\tau}}e^{\lambda}\right)^{1/2}} - \delta_{k,1}, \tag{63}$$

и можно доказать следующую лемму.

Лемма 4.1. *Статистическая сумма матричной модели* (9), $\mathcal{F}_{KP}(\{T^{\pm}\})$, *зависит только от четных времен* $T^{\pm}_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!}\operatorname{tr}\frac{\partial^{2n}}{\partial\lambda^{2n}}\frac{1}{e^{\lambda}\pm 1}$.

Удерживая только члены нулевого и первого порядка по следам матрицы λ в выражениях для моментов, доказывается, что старшие индексы пересечений на д.п м совпадают с индексами пересечений на непрерывном пространстве модулей.

$$\langle\langle \tau_{d_1}\dots\tau_{d_n}\rangle\rangle_g = \langle \tau_{d_1}\dots\tau_{d_n}\rangle_g \quad \text{при } d_1+\dots+d_n = 3g-3+n. \tag{64}$$

Уже алгебра времен $t^{\pm}_{2n}$ оказывается достаточно сложной Вводя времена $t^{\pm}_k(\lambda)$, являющиеся вариационными производными $t^{\pm}_k$:

$$t^{\pm}_k(\lambda_j) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda_j{}^k}\frac{1}{e^{\lambda_j}\pm 1}, \tag{65}$$

получим "правила слияния" для времен $t^{\pm}_k(\lambda)$, приняв во внимание тот факт, что "отрицательные" времена t^{-}_k содержат только чисто полюса $k+1$-го порядка по λ.

$$\begin{aligned} t^{\pm}_{2n+1}(\lambda)t^{\pm}_{2m+1}(\lambda) = {} & \pm\ t^{\pm}_{2(n+m)+3}(\lambda) \mp \sum_{k=0}^{m}\frac{B_{2(n+m-k+1)}}{2(n+m-k+1)}\frac{t^{\pm}_{2k+1}(\lambda)}{(2m-2k)!\,(2n+1)!} \\ & \mp \sum_{p=0}^{n}\frac{B_{2(n+m-p+1)}}{2(n+m-p+1)}\frac{t^{\pm}_{2p+1}(\lambda)}{(2n-2p)!\,(2m+1)!}. \end{aligned} \tag{66}$$

и для смешивающих соотношений

$$\begin{aligned} t^{-}_{2n+1}(\lambda)t^{+}_{2m+1}(\lambda) = {} & -\sum_{k=0}^{n}\frac{B_{2(n+m-k+1)}}{2(n+m-k+1)}\frac{(2^{2(n+m-k+1)}-1)}{(2n-2k)!\,(2m+1)!}t^{-}_{2k+1}(\lambda) \\ & + \sum_{k=0}^{m}\frac{B_{2(n+m-k+1)}}{2(n+m-k+1)}\frac{(2^{2(n+m-k+1)}-1)}{(2m-2k)!\,(2n+1)!}t^{+}_{2k+1}(\lambda), \end{aligned} \tag{67}$$

где B_m – числа Бернулли.

Вычисление уравнений Швингера–Дайсона во временах $t^{\pm}_k$ использует нетривиальные комбинаторные соотношения для полиномов Бернулли. Все времена (65) интерпретируются как *независимые* переменные, что верно лишь в пределе $N \to \infty$ и в предположении *квазиполиномиальности* выражения (9) при конечных g и n.

Алгебра связей $L^{\pm}_{2s+1}$ после верхнетреугольного преобразования распадается на две коммутирующие между собой алгебры Вирасоро

$$
\begin{aligned}
[\tilde{L}^{\pm}_s, \tilde{L}^{\pm}_t] &= \frac{4}{\alpha^2}(s-t)\tilde{L}^{\pm}_{s+t}, \quad s,t \geq -1. \\
[\tilde{L}^{+}_s, \tilde{L}^{-}_t] &= 0, \quad s,t \geq -1.
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Выражения для генераторов этой алгебры все еще достаточно сложны, но после некоторого канонического преобразования времен связи $\tilde{L}^{\pm}_{2s+1}$ превращаются в два набора связей Вирасоро матричной модели Концевича Тем самым, доказана теорема:

Теорема 4.1. *Статистические суммы матричной модели д п.м.* (9) *и матричной модели Концевича* (4) *связаны точным соотношением*

$$
e^{\mathcal{F}_{KP}(\{T^{\pm}_{2n}\})} = e^{C(\alpha N)} e^{-\mathcal{A}} e^{\mathcal{F}_K(\{\xi^{+}_n\}) + \mathcal{F}_K(\{\xi^{-}_n\})} \cdot 1
\tag{69}
$$

где $\xi^{\pm}_n = \pm T^{\pm}_{2n}$ *и* $\mathcal{A}$ *– квадратичный дифференциальный оператор по* $\partial/\partial\xi^{\pm}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = & \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{B_{2(n+m+1)}}{4(n+m+1)} \frac{1}{(2n+1)!\,(2m+1)!} \times \\
& \times \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi^{+}_m}\frac{\partial}{\partial\xi^{+}_n} + \frac{\partial}{\partial\xi^{-}_m}\frac{\partial}{\partial\xi^{-}_n} - 2(2^{2(n+m+1)}-1)\frac{\partial}{\partial\xi^{+}_m}\frac{\partial}{\partial\xi^{-}_n} \right\} \\
& - \sum_{n=2}^{\infty} \alpha N \frac{2^{2n-1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial\xi^{-}_n} + \frac{\partial}{\partial\xi^{+}_n} \right).
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Здесь $C(\alpha N)$ *– функция, зависящая лишь от* αN *и такая, что* $\mathcal{F}_{KP}(\{T^{\pm}_{2n}\}) = 0$ *при* $T^{\pm}_{2n} \equiv 0$, B_{2k} *– числа Бернулли.*

Это – наиболее нетривиальное утверждение, полученное из анализа условий связи матричных моделей. Его интерпретация с точки зрения геометрии представляется весьма важной задачей.

В заключении главы приводится формулировка матричных моделей с точки зрения конформной теории поля

Диссертация также содержит два приложения, в которых исследуются матричные модели, хотя и не относящиеся к классу моделей с внешним полем, но представляющие самостоятельный интерес. В приложении 1 исследуется эрмитова двухматричная модель типа т.н. "модели $O(n)$" с четвертичным взаимодействием. Эта модель относится к классу моделей, описывающих *спиновые системы* (гравитацию с материей) на случайных решетках[15]. В частности, $O(1)$-модель в точности задает статистическую сумму модели Изинга на случайной решетке Исследуемая модель задается интегралом по $n+1$ эрмитовым матрицам:

$$
Z = e^{N^2 F} = \int dM \prod_{i=1}^{n} dA_i \exp\left\{ -N \operatorname{tr}\left(V(M) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M A_i M A_i \right) \right\}.
\tag{71}
$$

[15] V A Kazakov, *Phys Lett* **119A** (1986) 140–144

с произвольным полиномиальным потенциалом $V(M)$.

После гауссова интегрирования по A-матрицам в пределе $N \to \infty$ распределение собственных значений матрицы M определяется уравнением седловой точки, которое после введения плотности собственных значений $\rho(\lambda) = \frac{1}{N}\sum_i \delta(\lambda - \lambda_i)$, на интервале $[\alpha, \beta]$ и однопетлевого коррелятора $\Omega(p) = \int_a^b d\mu\, \frac{\rho(\mu)}{p-\mu}$ принимает вид:

$$V'(p) + \frac{n}{p} = \Omega(p+i0) + \Omega(p-i0) + n\,\frac{1}{p^2}\,\Omega(\frac{1}{p}), \qquad p \in [\alpha, \beta]. \tag{72}$$

Исследуемая модель сводится к $O(n)$-модели на случайной решетке переопределением матричных полей:

$$M \to \frac{1-X}{1+X}, \qquad A_i \to \frac{1}{2}(1+X)^{1/2} S_i (1+X)^{1/2}. \tag{73}$$

Подставляя эти выражения в исходный интеграл, получим:

$$Z \propto \int dX \prod_{i=1}^{n} dS_i \exp\left\{-N\,\mathrm{tr}\left(V\left(\frac{1-X}{1+X}\right) + (2-n)\log(1+X) + X\sum_{i=1}^{n} S_i^2\right)\right\}, \tag{74}$$

т.е. получим $O(n)$-модель на случайной решетке, но с неполиномиальным потенциалом $U(p) = V\left(\frac{1-p}{1+p}\right) + (2-n)\log(1+p)$. Уравнение седловой точки такой модели имеет вид

$$W(p+i0) + W(p-i0) + nW(-p) = U'(p). \tag{75}$$

где $W(p)$ – однопетлевое среднее поля X. Физичесий разрез при этом проходит от $a = (1+\alpha)/(1-\alpha)$ до $b = (1+\beta)/(1-\beta)$, а нефизический – зеркальное отражение физического относительно нуля. Точка $p = 1$ лежит на физическом, а точка $p = -1$ – на нефизическом разрезе. Критическое поведение отвечает ситуации, когда физический и нефизический разрезы смыкаются, так что необходимо предполагать, что $a > 0$.

Явное решение для $W(p)$ для произвольного потенциала представляется через эллиптические функции. В приложении вычислен явный ответ для гауссова потенциала $V(M) = \frac{1}{2T}M^2$. Переопределяя параметр $n \equiv 2\cos(\nu\pi)$, находится явный ответ F в роде ноль и критическое поведение струнной восприимчивости $U(T) = \frac{d^2}{dT^2}\left(T^2 F\right)$ при $a \to 0$. Критическое значение T_* величины T имеет вид:

$$T_* = \frac{\nu^2}{2\sin^2(\nu\pi/2)}. \tag{76}$$

В случае $n = 1$ получим $T_* = 2/9$ – это совпадает с результатом компьютерных вычислений[16], дающих $1/T_* = 4.504$.

Для струнной восприимчивости получим:

$$U(T) \sim (T_* - T)^{\frac{\nu}{1-\nu}}, \tag{77}$$

[16]G Cicuta, L Molinary, and E Montaldi, *Phys. Lett* **306B** (1993) 245 251

откуда струнная константа оказывается равной $\gamma_{str} = -\frac{\nu}{1-\nu}$.

В приложении 2 исследуется матричная модель Пеннера для виртуальных эйлеровых характеристик пространств модулей *неориентируемых* поверхностей. В общем случае виртуальные эйлеровы характеристики пространства модулей $\mathcal{M}_{g,n}$ имеют вид:

$$\kappa_{g,n} = \sum_{\text{клетки}} \frac{(-1)^{d_f}}{|G_f|}, \tag{78}$$

где $|G_f|$ обозначает порядок (объем) стабилизирующей (т.е. переводящей в себя клетку симплициального комплекса, отвечающую данному графу) подгруппы группы классов отображений. Сумма в (78) идет по *всем* классам сопряженности подгрупп модулярной группы, имеющих нетривиальный стабилизатор, а значит и по *всем* (не только старшей размерности) клеткам (графам с вершинами всех возможных валентностей) соответствующего симплициального комплекса, как и в случае дискретизованных пространств модулей. Однако получаемые в данном случае выражения намного проще и могут быть найдены явно не только в случае ориентируемых, но и для неориентируемых поверхностей. В последнем случае производящая функция величин (78) – это матричный интеграл

$$\begin{aligned} e^{F/2} &\sim \int d\varphi \exp\left\{Nt\left(-\frac{1}{4}\operatorname{tr}(\varphi^2) + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\operatorname{tr}(\varphi^n)\right)\right\} \\ &= \int d\varphi \exp\left\{\frac{Nt}{2}\operatorname{tr}(\log(1+\varphi)-\varphi)\right\}, \end{aligned} \tag{79}$$

в котором интегрирование идет по *ортогональным* матрицам из алгебры $O(N)$. С использованием техники кососимметричных многочленов доказывается утверждение:

$$\begin{aligned} F_{\text{non}} &= \frac{N(t+1)}{2}\log\frac{t+1}{t} \\ &- \sum_{g=1}^{\infty}\frac{2^{2g-1}-1}{2g(2g-1)}B_{2g}(Nt)^{1-2g}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{n}{2g-2+n}(-t)^{-n}. \end{aligned} \tag{80}$$

В приложении 2 модель Пеннера решена также в случае матриц из алгебры $Sp(2N)$. При этом с точностью до незначащих множителей, соответствующие статистические суммы трех моделей Пеннера: $Sp(2N)$ [кватернионные матрицы], $O(N)$ [вещественные матрицы] и $U(N)$ [1MM] связаны соотношением:

$$F_{\text{Q}} + F_{\text{non}} = 2F_{\text{or}}. \tag{81}$$

Литература

[1] J. Ambjørn and L. Chekhov, *The NBI matrix model of IIB superstring*, JHEP **9812**:007 (1998); hep-th/9805212.

[2] J. Ambjørn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen, and Yu. Makeenko, *Matrix model calculations beyond the spherical limit* Nucl. Phys., **B404** (1993) 127–172

[3] J. Ambørn, L. Chekhov, and Yu. Makeenko, *Higher genus correlators from the Hermitian one-matrix model*, Phys. Lett., **282B**, (1992) 341–348.

[4] L. Chekhov, *Matrix model for discretized moduli space*, Geometry and Physics, **12** (1993) 153–164.

[5] L. Chekhov, *Discretized moduli spaces and matrix models*, in: Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics (Proc. Intl. Conf., Kaciveli 1993), A. Boutet de Monvel and V. Marchenko (eds.) Kluwer, Dordrecht 1996, 187–206.

[6] L. Chekhov, *Quantum group structure for moduli space* $\mathcal{M}_{1,1}$, in: Proc. XXVIII Intl. Symp. Ahrenshoop on the Theory of Elementary Particles, 1994, DESY 95-027, 195–201.

[7] L. Chekhov, *Matrix model tools and geometry of moduli spaces*, Acta Appl. Math **48** (1997) 33–90.

[8] L. Chekhov and C. Kristjansen, *Hermitian matrix model with plaquette interaction*, *Nucl. Phys.* B479[FS] (1996) 683–696.

[9] L. Chekhov and Yu. Makeenko, *The multicritical Kontsevich–Penner model*, Mod. *Phys. Lett.* **A7** (1992) 1223.

[10] L. Chekhov and Yu. Makeenko, *Hint on the external field problem for matrix models*, *Phys. Lett.* **278B** (1992) 271–278.

[11] L. Chekhov and K. Palamarchuk, *Two-logarithm matrix model with an external field*. *Mod. Phys. Lett* **A14** No. 32 (1999) 2229–2243.

[12] L. Chekhov and A. Zabrodin, *A critical matrix model for non-oriented string*, Mod *Phys Lett.*, **A6** (1991) 3143–3152.

[13] К. Л. Зарембо, Л. О. Чехов, *Многоразрезные решения матричной модели Пеннера–Концевича*, Теор. Мат. Физ **93** No. 2 (1992) 354–368.

[14] L. Chekhov and K. Zarembo, *Effective action and measure in matrix model of IIB superstrings*, *Mod. Phys. Lett.*, **A12** (1997) 2331–2340.

.Подписано в печать05.09.2000г. Бумага офсетная
Формат бумаги 60/90 1/16 Усл. п.л 1,5. Цена договорная.
Тираж 120 экз. Заказ № 199.

Отпечатано в Издательстве МПУ "Народный учитель" с готового оригинал-макета.
107005. г Москва, ул Радио, д. 10-а, тел. 265-41-63, факс:265-41-62.