

На правах рукописи

Недобойко Михаил Владимирович

**МИКРО- И МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА  
СТОХАСТИЧЕСКИХ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР  
В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ**

01.04.14 – теплофизика и теоретическая теплотехника

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2003

Работа выполнена в Институте теплофизики Сибирского отделения РАН

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук  
профессор Григорьев Юрий Николаевич

доктор физико-математических наук  
Кузьмин Геннадий Андреевич

Ведущая организация:

Институт физики твердого тела РАН  
(г. Черноголовка, Московская обл.)

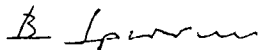
Защита состоится «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2004 г.

в \_\_\_ час на заседании диссертационного совета К 003.053.01 по присуждению ученой степени кандидата наук в Институте теплофизики СО РАН (630090, Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, 1)

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института теплофизики СО РАН

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2003 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
д.т.н.

 Ярыгин В.Н.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

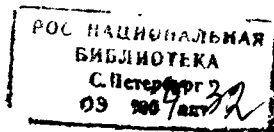
**Актуальность темы.** К настоящему времени в некоторых областях науки и техники широкое применение получили различные системы, функционирующие при температурах ниже 2 К. В такой ситуации единственным реальным хладагентом является сверхтекучий гелий (HeII). При конструировании подобных систем весьма важным является достоверное знание процессов теплообмена в HeII.

Первоначально макроскопическое поведение сверхтекучего гелия описывалось уравнениями двухжидкостной гидродинамики или уравнениями Ландау. Однако достаточно быстро стало ясно, что такой подход не в состоянии описать многие существенные эффекты, возникающие в HeII. Причина этого очевидна. Уравнения Ландау никаким образом не учитывают наличие вихрей сверхтекучей компоненты, возникающих в объеме жидкости при определенных условиях. Видимо, первый пример влияния вихрей на свойства HeII это случай вращающегося сверхтекучего гелия. Именно вихревая структура, аналогичная двумерному кристаллу, является, в этом случае, ответственной за приведение жидкости в твердотельное вращение.

В дальнейшем был осознан тот факт, что специфические вихревые конфигурации, типа прямых, слабо изогнутых линий или колец не реализуются в общем случае. В реальности полная вихревая картина представляет собой хаотически запутанную структуру, эволюционирующую во времени. Термин "вихревой клубок" (ВК) впервые появился в известной работе Р. Фейнмана 1955 года. Там же впервые был предложен качественный сценарий развития ВК. Дальнейший прогресс в данном направлении связан с работами Вайнена, который из общих соображений, феноменологически получил эволюционное уравнение на плотность вихревых линий в единице объема (ПВЛ).

В последствии уравнение Вайнена было связано с двухжидкостной гидродинамикой Ландау. В результате, в настоящее время имеется полная система уравнений, описывающая гидродинамику сверхтекучей турбулентности (ГСТ), которая широко применяется для объяснения многочисленных экспериментальных результатов, а также в инженерных приложениях.

В действительности, некоторая проблема заключается в том, что, по сути, уравнение Вайнена нельзя назвать точным. Оно получено с использованием различного рода предположений, которые хотя и



представляются правдоподобными, но, в то же время не являются строго доказанными. Видимо, полностью корректный подход заключался бы в рассмотрении полных стохастических уравнений вихревой динамики, основанных на законе Био-Савара, описывающем межвихревое взаимодействие. Кроме того, необходимо также принимать во внимание взаимодействие вихревых нитей со нормальной компонентой и изменения топологии ВК, происходящие при перезамыкании линий в момент их (само)пересечения. Однако, таким образом поставленная задача крайне сложна, и на настоящий момент не видно путей ее полного решения. В то же время, некоторые выводы относительно сверхтекучей турбулентности, возможно сделать исходя из непосредственного рассмотрения свойств вихревого клубка.

В общем случае вихревая динамика относится к такому разделу физики неупорядоченных систем, как хаотическая динамика протяженных объектов. Диапазон примеров достаточно широк. Теория полимеров, мембран, физика релятивистских струн, теория линейных дефектов в твердых телах и многое другое. Кроме того, имеются основания считать, что многие свойства классической турбулентности могут быть описаны в терминах, так называемых, вихревых трубок. Представляется естественным проникновение и объединение результатов из одной области исследований в другую. Что касается непосредственно HeII, то, как известно, влияние вихрей на свойства сверхтекучей жидкости достаточно сильное. В данной области существуют весьма развитые экспериментальные методы исследований. Таким образом, в данном контексте сверхтекучая турбулентность может служить некоторым “полигоном” для тестирования возможного аналитического развития теории динамики протяженных объектов. Учитывая все вышесказанное, изучение свойств ВК в сверхтекучем гелии представляется достаточно актуальной задачей.

**Целью работы** является изучение свойств вихревого клубка в HeII. Кроме того, в работе содержится часть, посвященная численному исследованию распространения мощных тепловых импульсов в сверхтекучем турбулентном гелии. Последнее позволяет сделать заключение о применимости теории Фейнмана-Вайнена близи точки фазового перехода HeII-HeI, а также прояснить вопрос, связанный с первоначальным зарождением вихревого клубка.

**Научная новизна.** На основе феноменологической Гауссовой модели ВК, обобщающей многие известные экспериментальные факты, рассмотрены, а также предсказаны некоторые физические эффекты, связанные с клубком. Рассчитана полная энергия, связанная с вихревым движением. Сделаны определенные выводы относительно формы вихревых нитей.

На основе точных уравнений стохастической вихревой динамики, определены некоторые общие черты эволюции хаотической вихревой структуры, что позволяет дополнить существующие в настоящий момент взгляды на природу сверхтекучей турбулентности.

Выявлены некоторые характерные специфические особенности уравнений вихревой динамики.

Проведено численное исследование распространения мощных тепловых импульсов второго звука в HeII вблизи точки фазового перехода, что позволило установить применимость теории Фейнмана-Вайнена в данной температурной области, а также прояснить вопрос, связанный с первоначальным возникновением вихревого клубка в объеме жидкости.

**Научная и практическая ценность.** На основе микроскопических уравнений динамики вихрей, а также, опираясь на известные экспериментальные и численные результаты, получена новая информация о свойствах вихревого клубка в сверхтекучем гелии и, соответственно, сверхтекучей турбулентности.

Исследование нелинейной эволюции импульсов второго звука позволило определить достоверность теории Фейнмана-Вайнена и, следовательно, уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности вблизи точки фазового перехода HeII-HeI. Кроме того, определено, что начальная эволюция вихрей удовлетворительно описывается генерирующим слагаемым в уравнении Вайнена, а предположение о постоянном существовании фоновой завихренности может быть снято.

**Автор представляет к защите следующие результаты:**

Исследование различных свойств вихревого клубка на основе Гауссовой модели. Вычислена энергия, связанная с вихревым движением, сделаны определенные заключения об усредненной форме вихревой линии, предсказана возможность существования волн плотности вихревых линий. Кроме того, вычислен гидродинамический импульс ВК, оп-

ределено затухание сверхтекучей компоненты в присутствии клубка, а также изменение скорости второго звука в HeII.

Точное решение стохастического уравнения вихревой динамики в локальном приближении. Проверку полученных результатов в численном эксперименте.

Задачу о распространении мощных тепловых импульсов в HeII, при отрицательном коэффициенте нелинейности второго звука.

**Апробация работы.** Некоторые результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях: The Second International Chernogolovka Workshop on Low Temperature Physics in Microgravity Environment, CWS'99; International Symposium on Quantum Fluids and Solids, qfs'98; 17<sup>th</sup> Cryogenic Engineering Conference and Exhibition.

**Публикации.** По материалам диссертационной работы опубликовано 8 работ.

**Личный вклад автора.** Постановка задач исследований осуществлена автором как самостоятельно, так и в соавторстве с д.ф.-м.н. С.К. Немировским и к.ф.-м.н. Л.П. Кондауровой. В опубликованных совместных работах лично автору принадлежит: 1) вычисление, на основе феноменологической Гауссовой модели вихревого клубка, всех рассматриваемых во второй главе диссертационной работы результатов; 2) постановка задачи, вычисления, интерпретация результатов, касающихся точного решения уравнения стохастической вихревой динамики в локальном приближении; 3) численная проверка упомянутых в предыдущем пункте результатов; 4) участие в постановке задачи, развитии соответствующих программных средств и интерпретации полученных результатов, касающихся распространения мощных тепловых импульсов в сверхтекучем гелии, при температуре, где коэффициент нелинейности второго звука принимает отрицательное значение.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы из 83 наименований. Диссертация изложена на 74 страницах, иллюстрирована 9 рисунками.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе диссертации представлен обзор теоретических, экспериментальных и численных работ, посвященных исследованиям вихревого клубка и сверхтекучей турбулентности. Там же приведен обзор основных аналитических инструментов, необходимых для дальнейшего изложения. Также рассматривается современное состояние затрагиваемых в диссертации вопросов.

В 1955 году Р. Фейнман предложил следующую качественную картину эволюции вихревого клубка. Если разность скоростей нормальной и сверхтекучей компоненты превышает некоторую критическую величину, в объеме Нелл возникает хаотическая вихревая структура сверхтекучей компоненты. При этом участки вихревой линии двигаются со скоростью, отличной от локальной скорости сверхтекучей компоненты и, таким образом, испытывают действие силы Магнуса. Возможно как увеличение длины некоторого участка, так и его сжатие. Предполагалось, что первый процесс преобладает, что в результате рано или поздно приводит к пересечениям вихревых нитей и перезамыканиям (реконнекциям) последних. В результате реконнекций вихревые петли дробятся на все более мелкие и, в конечном счете, трансформируются в тепловые возбуждения. На основе такого сценария Вайнен вывел эволюционное уравнение, описывающее изменение плотности вихревых линий (ПВЛ):

$$\frac{dL}{dt} = \alpha_v |v_{ns}| L^{3/2} - \beta_v L^2 \quad (1)$$

При этом были использованы соображения размерности, аналогия с классической турбулентностью и известные результаты для динамики одиночного вихревого колечка. В дальнейшем уравнение Вайнена было использовано для построения гидродинамики сверхтекучей турбулентности.

В указанном подходе соотношение (1) нельзя считать абсолютно достоверным, поэтому представляется существенным вывод этого соотношения (или некоторого его аналога) на основе точных уравнений динамики вихревых линий. Рассмотрим эти уравнения более подробно. В общем случае скорость участка вихря описывается следующим образом:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{s}}_{ind} + \vec{v}_s + \alpha \frac{\vec{s}'}{|s'|} \times (\vec{v}_{ns} - \dot{\vec{s}}_{ind}) - \alpha' \frac{\vec{s}'}{|s'|} \times \frac{\vec{s}''}{|s''|} \times (\vec{v}_{ns} - \dot{\vec{s}}_{ind}), \quad (2)$$

где вектор  $\vec{s}(\xi, t)$  определяет положение некоторой точки вихревой линии с параметризацией  $\xi$ ;  $\dot{\vec{s}}_{ind}$  – скорость, наведенная всеми вихрями в некоторой точке вихревой линии;  $\vec{v}_s, \vec{v}_{ns}$  – соответственно внешняя скорость сверхтекучей компоненты и разность скоростей нормальной и сверхтекучей компонент;  $\alpha, \alpha'$  – некоторые определенные коэффициенты. В свою очередь, индуцированная скорость определяется законом Био-Савара:

$$\frac{d\vec{s}_{ind}}{dt} = \frac{k}{4\pi} \int \frac{(\vec{s}(\xi', t) - s(\xi, t)) \times \vec{s}'(\xi', t)}{|\vec{s}(\xi, t) - \vec{s}(\xi', t)|^3} d\xi' \quad (3)$$

Если предположить, что вклад в наведенную скорость от удаленных участков вихря незначителен, (3) может быть приближенно преобразовано к следующему виду:

$$\frac{d\vec{s}_{ind}}{dt} = \frac{k}{4\pi} \frac{\vec{s}'(\xi, t) \times \vec{s}''(\xi, t)}{|s'(\xi, t)|^3} \quad (4)$$

Последнее соотношение называют локальным (самоиндуцированным) приближением.

Как видно, уравнения вихревой динамики в НсП крайне сложны, и получить на их основе некоторый аналог уравнения Вайнена представляется затруднительным. В этой связи существенную значимость приобретают феноменологические модели ВК, а также численные исследования.

В существующей форме уравнение Вайнена является составной частью уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности. Система уравнений ГСТ получена тремя различными авторами, которые, при выводе, использовали различные подходы. Уравнения ГСТ с хорошей точностью объясняют многочисленные эксперименты, а также используется в инженерных задачах.

**Вторая глава** диссертации посвящена изучению свойств вихревого клубка в рамках феноменологического подхода.



В пункте 2.1 описывается построение Гауссовой модели ВК. Основная идея заключается в следующем: на основании известных экспериментальных и/или численных результатов построить функцию распределения в пространстве вихревых петель, а также характеристический функционал ВК. В качестве основы были выбраны следующие параметры:

$$\left\langle \frac{1}{V} \sum_j \int_0^{L_j} |\vec{s}'_j(\xi_j)| d\xi_j \right\rangle = L_V \quad (5)$$

$$\left\langle \frac{1}{VL_V} \sum_j \int_0^{L_j} \vec{s}'_{jz}(\xi_j) \vec{s}'_{jz}(\xi_j) d\xi_j \right\rangle = 1 - I_{\parallel} = I_{zz} \quad (6)$$

$$\left\langle \frac{1}{VL_V^{3/2}} \sum_j \int_0^{L_j} \vec{s}'_{jz}(\xi_j) \times \vec{s}''_{jz}(\xi_j) d\xi_j \right\rangle = I_l e_z \quad (7)$$

$$\left\langle \frac{1}{VL_V} \sum_j \int_0^{L_j} \vec{s}''_{jz}(\xi_j) \vec{s}''_{jz}(\xi_j) d\xi_j \right\rangle = c_2^2 L_V \quad (8)$$

Здесь  $L_V$  – плотность вихревых линий;  $I_{zz}$ ,  $I_l$  – параметры анизотропии ВК;  $c_2^2$  – коэффициент, связанный с полной кривизной вихревых линий;  $e_z$  – единичный вектор в направлении противотока. Усреднения предполагаются по всем возможным реализациям вихревых конфигураций, суммирования по всем вихревым петлям, присутствующим в системе, интегрирования по длине каждой из соответствующих петель. Далее предполагалось, что все состояния вихревых петель, дающие корректные значения параметров (5)–(8) имеют одинаковое распределение вероятности:

$$P\{\vec{s}_j\} \sim \frac{1}{N_{allowed}} \quad (9)$$

Учитывалась также нормировка параметра  $\xi$  на длину дуги. В результате полное число допустимых конфигураций определялось следующим образом:

$$N_{allowed} = \int D\{\bar{s}_j\} \times \delta(|\bar{s}'_j(\xi_j)| - 1) \quad (10)$$

Далее использовалось известное в теории полимеров соотношение:

$$\int d^3\bar{l}_n \delta(|\bar{l}_n| - l_n) \rightarrow \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int d^3l_n e^{-l_n^2/l_n^2} \quad (11)$$

В результате, функция распределения вихревых петель принимала следующий вид:

$$P\{\bar{s}\} \sim e^{-\int \mathfrak{L}}, \quad (12)$$

с лагранжианом  $\mathfrak{L}$  квадратичного вида:

$$\mathfrak{L} = \sum_j \int_0^{L_j} s'_{j\alpha} \Lambda_1^{\alpha\beta} s'_{j\beta} + s''_{j\alpha} \Lambda_2^{\alpha\beta} s''_{j\beta} + s'''_{j\alpha} \Lambda_3^{\alpha\beta} s'''_{j\beta} + \dots \quad (13)$$

Далее было стандартным образом выполнено функциональное интегрирование и вычислен характеристический функционал системы. Исходя из определенных предпосылок, определялись и коэффициенты, входящие в характеристический функционал. В итоге, получен окончательный результат:

$$W\{P_j(k)\} = \exp\left\{\sum_j \sum_k L_j^2 P_j^\alpha(k) N^{\alpha\beta}(k) P_j^\beta(-k)\right\}, \quad (14)$$

с полностью определенной матрицей  $N^{\alpha\beta}(k)$ .

Пункт 2.2 посвящен вычислению энергии, связанной с вихревым движением:

$$E = \left\langle \frac{1}{2} \int \rho_s v_i^2 d^3r \right\rangle = \frac{\rho_s \mathcal{K}^2}{8\pi} \sum_{i,j} \int_0^{L_i} \int_0^{L_j} \frac{\bar{s}'_i(\xi_i) \bar{s}'_j(\xi_j)}{|\bar{s}'_i(\xi_i) - \bar{s}'_j(\xi_j)|} d\xi_i d\xi_j \quad (15)$$

Очевидно, что (15) может быть эквивалентно выражено через (14):

$$E = \frac{\rho_s \kappa^2}{2} \sum_{i,j} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 k^2} \int_0^{L_j} \int_0^{L_i} \frac{\delta^2 W}{i\delta P_i^\alpha(\xi_i) i\delta P_j^\alpha(\xi_j)} \times \\ \times e^{i\vec{k}(\vec{s}_i(0) - \vec{s}_j(0))} d\xi_i d\xi_j \Big|_{P(\xi_i) = \theta(\xi_i) \theta(\xi - \xi_i)} \quad (16)$$

Дальнейшие вычисления связаны с простыми, но достаточно громоздкими выкладками для определения интегралов, входящий в (16). Результат для единственной петли, определенной и фиксированной длины  $L$  имеет следующий вид:

$$E = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \frac{R}{a_0} + \frac{\rho_s \kappa^2 L}{4\pi} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} (f_2 - f_1)\right) \ln \frac{R}{a_0} + \\ + \frac{\rho_s \kappa^2 L}{4\pi} \left( \frac{2f_3 I_1^2}{(\sqrt{\pi} - 1)^{1/2} \pi^{5/2} c_2^2} + \frac{f_2}{\pi^{3/2} (\sqrt{\pi} - 1)^{1/2}} \right), \quad (17)$$

где величины  $f_1, f_2, f_3$  определяются через структурные параметры (5)–(8).

Рассмотрим слагаемые, входящие в (17). Первое из них в правой части соответствует энергии единицы длины прямого вихря, умноженной на полную длину. Третье и четвертое слагаемые возникают в связи с крупномасштабным взаимодействием вихрей. Третье слагаемое при этом связано с поляризацией петли, что подразумевает “упругость” ВК в  $\vec{v}_{ns}$  – направлении, что, в свою очередь, предполагает принципиальную возможность существования некоторого трехмерного аналога волн Ткаченко, но уже для хаотического вихревого клубка. Логарифмическая особенность второго слагаемого означает, что оно возникло благодаря знаменателю:  $|s(\xi) - s(\xi')|$ . При этом соседним точкам кривой соответствует расходимость первого слагаемого. Таким образом, остается предположить, что второе слагаемое возникло благодаря случайным самопересечениям. При этом количество самопересечений пропорционально полной длине  $L$ .

В пункте 2.3 на основе (14) вычисляется гидродинамический импульс ВК:

$$\vec{J} = \left\langle \frac{\rho_s \kappa^2}{2} \sum_j \int_0^{L_j} \vec{s}_j(\xi_j) \times \vec{s}'_j(\xi_j) d\xi_j \right\rangle \quad (18)$$

В Фурье-представлении последнее соотношение, аналогично (15), определяется через характеристический функционал. В результате показано, что вихревой клубок индуцирует дополнительный поток сверхтекучей компоненты, направленный против основного потока:

$$\vec{J}_z = - \left( \frac{\rho_s \kappa I_1 \alpha_v}{\rho_n c_2^2 \beta_v} \right) \rho_s \vec{v}_s \quad (19)$$

Можно сказать, что такой эффект есть некоторый трехмерный аналог известного эффекта Костерлица-Саулесса. Расчет показывает, что подавление может быть порядка нескольких процентов, что вполне достаточно для экспериментального изучения.

По-видимому, большая часть экспериментальной информации о свойствах ВК получена при зондировании объема HeII вторым звуком, распространение которого имеет определенные особенности в присутствии ВК. Гауссова модель позволяет вычислить изменение скорости второго звука, имеющее место при наличии клубка. Получен следующий результат:

$$\frac{\Delta u_2}{u_2} = - \frac{4 \rho \kappa I_1 \alpha^2 (1 - I_{xx})^2 \vec{v}_{ns}^4}{\rho_n c_2^4 \beta^3 \omega^2} \quad (20).$$

Пункт 2.4 посвящен обсуждению полученных при помощи Гауссовой модели ВК результатов. Соотношение для энергии вихревого движения представляет самостоятельный интерес. Кроме этого, показана возможность существования упругих волн ПВЛ в клубке (трехмерный аналог волн Ткаченко). В рамках модели усредненная форма ВК должна быть такой, что количество самопересечений пропорционально полной длине линии.

В принципе, подавление сверхтекучей плотности в присутствии клубка может привести к ситуации, когда сверхтекучая компонента исчезает полностью. Очевидно, что последнее означает фазовый переход HeII-HeI. Таким образом, представляется возможным на основе Гауссовой модели определить некоторый не совсем стандартный взгляд на теорию фазовых переходов, а также исследовать свойства

системы вблизи критической температуры. К сожалению, недостаток экспериментальных данных не позволяет в полной мере рассмотреть указанный подход.

**В третьей главе** диссертации на основе точных уравнений вихревой динамики рассматриваются некоторые черты стохастической эволюции вихревой петли.

В пункте 3.1 определяются основные модельные уравнения. Предполагается, что динамика петли описывается локальным приближением (4) с добавочным стохастическим слагаемым, которое предполагается коррелированным как дельта-функция по времени (белый шум). В свою очередь, предполагается, что пространственная корреляция внешнего возмущения, степенным образом зависит от волнового вектора, полученного при одномерном Фурье-разложении петлевой конфигурации. Таким образом, основное уравнение динамики вихревой петли имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{s}(\xi, t)}{dt} = \beta \vec{s}' \times \vec{s}'' + \nu \vec{s}''' + \vec{f}(\xi, t), \quad (21)$$

где коррелятор внешнего возмущения определяется в одномерном  $k$ -пространстве:

$$\langle f_{k_1, \omega_1}^\alpha f_{k_2, \omega_2}^\beta \rangle = \frac{D}{k_1^\gamma} \delta^{\alpha\beta} \delta(k_1 + k_2) \delta(\omega_1 + \omega_2) \quad (22)$$

**Пункт 3.2** посвящен постановке задачи и обоснованию соответствующей модели. Рассматривается единственная вихревая петля в безграничном трехмерном пространстве. Эволюция этой петли происходит согласно уравнению (21). Реконнекции, в данной постановке, полностью исключены из рассмотрения. Предполагается, что такой подход позволит в некоторой степени разделить два вклада (собственную динамику и реконнекции) в эволюцию вихревого клубка. Предполагается также отсутствие внешнего теплового потока. Таким образом, целью рассматриваемой модели является изучение исключительно собственной динамики вихревой петли при наличии в системе стохастического внешнего возмущения.

**Пункт 3.3** посвящен конкретным вычислениям. В качестве основного аналитического инструмента использован метод ренормализационной группы в формулировке Вильсона. Рассмотрим этот метод более подробно. Перепишем уравнение (21) в Фурье-представлении:

$$i\omega s_{k,\omega}^\alpha = -i\beta \int \int \int dk_1 dk_2 d\omega_1 d\omega_2 k_1 k_2^\beta s_{k_1,\omega_1}^\beta s_{k_2,\omega_2}^\gamma \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \delta(k_1 + k_2 - k) \times \\ \times \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega) - \nu k^2 s_{k,\omega}^\alpha + f_{k,\omega}^\alpha \quad (23)$$

Или, для удобства, в более краткой форме:

$$i\omega s_{k_0,\omega_0}^\alpha = \Gamma_{120}^{\alpha\beta\gamma} s_{k_1,\omega_1}^\beta s_{k_2,\omega_2}^\gamma - \nu k^2 s_{k,\omega}^\alpha + f_{k,\omega}^\alpha, \quad (24)$$

где  $\Gamma_{120}^{\alpha\beta\gamma}$  означает соответствующий интегральный оператор. Далее разделим  $k$ -пространство на высокие и низкие гармоники, при этом:

$$\vec{s} = \vec{s}^< + \vec{s}^> \quad (25)$$

В результате уравнение (24), например, для некоторой гармоники из низкочастотной области примет следующий вид:

$$i\omega s_{k_0,\omega_0}^{\alpha<} = \Gamma_{120}^{\alpha\beta\gamma} (\langle s_{k_1,\omega_1}^{\beta>} s_{k_2,\omega_2}^{\gamma>} \rangle + \langle s_{k_1,\omega_1}^{\beta>} \rangle s_{k_2,\omega_2}^{\gamma<} + s_{k_1,\omega_1}^{\beta<} \langle s_{k_2,\omega_2}^{\gamma>} \rangle + s_{k_1,\omega_1}^{\beta<} s_{k_2,\omega_2}^{\gamma<} ) - \\ - \nu k^2 s_{k,\omega}^{\alpha<} + f_{k,\omega}^{\alpha<} \quad (26)$$

Далее будем считать, что высокие гармоники оказывают некоторое усредненное влияние на низкие гармоники. Другими словами, мы не рассматриваем взаимодействие некоторой гармоники из низкочастотного региона с каждой гармоникой из высокочастотной области. Вместо этого учитывается влияние всего высокочастотного региона. Таким образом, высокие гармоники исключаются из непосредственного рассмотрения. В этом заключается первый этап РГ-метода. Такая процедура аналогична преобразованию Каданова. Проанализируем возможные преобразования параметров динамического уравнения на первом этапе преобразования. Например, в теории турбулентности усреднение высокочастотного региона приводит к увеличению вязкости. Причина этого явления очевидна. Два процесса влияют на эволюцию амплитуды любой гармоники. Первая часть это диссипация (второе

слагаемое в правой части уравнения (24)). Вторая часть, это нелинейное взаимодействие с другими гармониками. (Здесь мы не учитываем влияние случайного возмущения.) Для турбулентности, мы получаем, что усредненное влияние высокочастотного региона приводит к увеличению первоначальной диссипации в низкочастотной области. Последнее, в свою очередь, с необходимостью означает, что существует поток амплитуд гармоник по спектру, направленный в высокочастотную область, приводящий к увеличению первоначальной диссипации за счет второй части механизма эволюции для амплитуд гармоник. В теории турбулентности этот результат хорошо известен. Допустим, рассматривая некоторую динамическую задачу, мы получили бы в аналогичной ситуации отрицательную добавку к вязкости. Последнее с необходимостью означало бы наличие потока по спектру в обратном направлении. (Именно такой случай реализуется при рассмотрении двумерной турбулентности). В свою очередь, нулевая добавка означала бы отсутствие потока по спектру.

Оказалось, что в рассматриваемом случае возможно *точно* выполнить требуемые усреднения в (26). Причем все они оказываются равными нулю. Таким образом, в результате усреднения гармоник высокочастотного региона соотношение (24) точно воспроизводит само себя, что означает отсутствие перенормировок каких-либо слагаемых в данном уравнении. Последнее, как уже говорилось, означает отсутствие потока амплитуд гармоник по спектру при рассмотрении вихревой динамики на основе локального приближения.

В разделе 3.4 проводится численная проверка полученных результатов. Численный эксперимент предполагал рассмотрение развития достаточно сложной начальной вихревой конфигурации на основе локального приближения. При этом предполагалось наличие в (21) только нелинейного слагаемого, т. е. вязкость и диссипация полагались равными нулю. Показано, что после некоторого переходного процесса, означающего, очевидно, переход вихревой петли в некоторое стационарное состояние, упорядоченный перенос гармоник по спектру полностью прекращался. Таким образом, аналитические результаты предыдущего раздела полностью подтвердились. Кроме того, было выяснено достаточно необычное свойство нелинейного взаимодействия вида  $\vec{s}' \times \vec{s}''$ . Показано, что даже в нестационарной ситуации перераспределение амплитуд возможно *только* между уже существующими гармониками. В случае замкнутой кривой новые (изначаль-

но невозбужденные) гармоники под влиянием указанной нелинейности появиться не могут. Это несколько неожиданно, поскольку сами по себе уравнения (21), (24) не запрещают появления новых гармоник.

Раздел 3.5 посвящен обсуждению результатов и выводам. До сих пор существовал определенный взгляд на природу сверхтекучей турбулентности, основанный на идее прямого каскада по спектру. Другими словами, предполагалось, что возникшие в результате некоторых крупномасштабных возмущений низкие гармоники за счет нелинейных эффектов (нелинейное слагаемое в (21)) затем переносятся по спектру в высокочастотную область, где сильны диссипативные механизмы. Таким образом, в принципе, возможно существование стабильных вихревых глобул, определяющих свойства сверхтекучей турбулентности. Представленное рассмотрение коренным образом меняет эту точку зрения. Действительно, исходя из полученного результата, следует заключение, что достигший некоторого стабильного состояния, вихревой клубок будет находиться в этом состоянии неопределенно долгое время. Кроме того, очевидно, что это состояние зависит от многих внешних (по отношению к уравнению (21)) факторов, но не зависит напрямую от нелинейного слагаемого в (21). К числу таких факторов можно отнести, например, внешний тепловой поток, граничные условия и т. д. В таком случае есть основания предполагать отсутствие универсальности для развитой сверхтекучей турбулентности. Другими словами, в рассмотренном случае свойства турбулентного состояния HeII должны во многом определяться упомянутыми внешними факторами. Безусловно, к последним относятся реконнекции. Кроме того, возможно именно этот процесс и восстанавливает универсальность сверхтекучей турбулентности. Таким образом, можно сделать вывод, что, по-видимому, невозможно адекватное описание стохастических вихревых структур, основанное на микроскопических уравнениях динамики вихрей, но не учитывающее процессы перезамыкания вихревых линий.

В четвертой главе на основе численной модели изучается распространение мощных тепловых импульсов, в том числе, и в температурной области, близкой к точке фазового перехода HeII-HeI.

Раздел 4.1 посвящен постановке задачи и обзору экспериментальных и аналитических работ на соответствующую тему.

В разделе 4.2 приведена система уравнений ГСТ, разложенная до второго порядка по отклонениям температуры и энтропии от равновесного значения. Кроме того, дается определение коэффициента не-



линейности второго звука, а также рассматриваются температурные области, где эта величина принимает соответственно положительное, нулевое и отрицательное значения.

Раздел 4.3 посвящен численному изучению распространения тепловых импульсов при температуре сверхтекучего гелия, где коэффициент нелинейности второго звука принимает положительное значение. Рассматриваются форма, амплитуда и место положения импульса в зависимости от времени. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными позволяет сделать вывод, что первоначальное зарождение ВК неплохо описывается затравочным членом в уравнении Вайнена. Если же в расчетах использовать некоторую величину фоновой плотности вихревых линий, то удовлетворительного согласия с экспериментом не наблюдается ни при каких значениях этой величины. Расчеты при различных комбинациях затравочного члена и фоновой завихренности также не согласуются с экспериментом. Таким образом, можно сделать вывод о том, что первоначальное зарождение ВК описывается генерирующим слагаемым в уравнении Вайнена с удовлетворительной точностью.

В разделе 4.4 численно изучается распространение тепловых импульсов при температуре невозмущенного HeII, такой что  $1 - T/T_\lambda < 10^{-5}$ . Полученные результаты – форма, амплитуда и расположение импульса в зависимости от координаты и времени, как и ранее, сравниваются с экспериментом. Кроме того, расчеты проводились с использованием генерирующего слагаемого в уравнении Вайнена. Сравнение расчетных и экспериментальных кривых показывает, что они, в значительной мере совпадают, во всяком случае, качественно. Таким образом, представляется возможным сделать вывод о применимости уравнений гидродинамики сверхтекучей турбулентности (в том числе и уравнения Вайнена) вблизи точки фазового перехода HeII-HeI. Также подтверждается справедливость подхода, когда первоначальное зарождение ВК описывается генерирующим слагаемым.

Раздел 4.5 посвящен окончательному обсуждению рассмотренных в четвертой главе результатов. Показано, что уравнение Вайнена с затравочным слагаемым более адекватно описывает распространение импульсов второго звука, а значит и свойства сверхтекучей турбулентности, чем предположение о существовании постоянного фонового значения ПВЛ. Показано также, что уравнения ГСТ в принципе применимы вблизи точки фазового перехода HeII-HeI.

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ  
ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ:**

1. Кондаурова Л.П., Немировский С.К., Недобойко М.В. 1999 “Взаимное влияние квантованных вихрей и тепловых импульсов в сверхтекучем гелии”, ФНТ №7, стр. 639–649.
2. Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K., Nedoboiko M.V. 1999 “Mutual influence of quantum vortices and heat pulses in superfluid helium”, Low Temp. Phys. №7, pp. 475–482.
3. Kondaurova L.P., Nemirovskii S.K., Nedoboiko M.V. 2000 “Interaction of Intense Heat Pulses and Vortices HeII.”, J. of Low Temp. Phys. V. 119, №3/4, pp. 329–335.
4. Nemirovskii S.K., Nedoboiko M.V. 2000 “Applications of Gaussian model of the vortex tangle in the superfluid turbulent HeII”, e-print cond-mat/0011102
5. Nemirovskii S.K., Nedoboiko M.V. 2001 “Applications of Gaussian model of the vortex tangle in the superfluid turbulent HeII”, in “Quantized vortex dynamics and superfluid turbulence”, ed. C. Barenghi (Springer Verlag, 2001, Berlin).
6. Кондаурова Л.П., Немировский С.К., Недобойко М.В. “Численное моделирование динамики уединенных интенсивных волн второго звука в турбулентном сверхтекучем гелии”, Вычислительные технологии №6, 2001.
7. Nedoboiko M.V. 2003 “Local induction approximation in the theory of superfluid turbulence” e-print cond-mat/0302144.
8. Nedoboiko M.V. 2003 “Local induction approximation in the theory of superfluid turbulence. Numerical consideration”, e-print cond-mat/0303631.

Из фондов Российской национальной библиотеки

Подписано к печати 17 декабря 2003 г. Заказ № 168  
Формат 60/84/16. Объем 1 уч.-изд. л. Тираж 100 экз.

---

Отпечатано в Институте теплофизики СО РАН  
630090, Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, 1

**В - - 7 8 5**

РНБ Русский фонд

2004-4

21944

Из фондов Российской национальной библиотеки