Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Научно-исследовательский вычислительный центр

На правах рукописи

МЕДВЕДИК Михаил Юрьевич

СУБИЕРАРХИЧЕСКИЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА ПЛОСКИХ ЭКРАНАХ

Специальность 01.01.07 – Вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2005

Работа выполнена на кафедре математики и математического моделирования Пензенского государственного университета.

Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор **Смирнов Ю. Г.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Ильинский А. С.**;

доктор физико-математических наук, профессор **Самохин А. Б.**

Ведущая организация – Казанский государственный институт, г. Казань.

Защита диссертации состоится «____» ______________2005 г., в ____ часов ____ минут, на заседании диссертационного совета К 501.001.11 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119992 ГСП-2, г. Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, научно-исследовательский вычислительный центр.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ.

Автореферат разослан «___» ____________ 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физико-математических наук **Суворов В. В.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена решению задачи дифракции электромагнитной волны на плоском ограниченном экране произвольной формы в предположении, что поверхность экрана является бесконечно тонкой и идеально проводящей.

Актуальность темы

Задача дифракции электромагнитной волны на произвольных экранах является актуальной в связи с широким применением результатов решения задачи в проектировании антенных решеток, полосковых антенн и печатных проводников. Необходимость дальнейшего рассмотрения задачи диктуется, например, практической потребностью решения задачи синтеза антенн. Таким образом, рассматриваемая задача дифракции требует глубокого теоретического и численного исследования в связи с широким применением антенн в различных областях радиоэлектроники. Данное направление – предмет исследования ряда авторов (P. M. van den Berg, A. W. Glisson, S. M. Rao, D. R. Wilton, Л. А. Вайнштейн, Д. И. Воскресенский, Е. В. Захаров, А. С. Ильинский, Ю. В. Пименов, А. Г. Свешников, Ю. Г. Смирнов, Е. Е. Тыртышников). Исследование этой области электродинамики привело к активному и успешному применению численных методов для решения задач дифракции. Однако при всем многообразии исследований до сих пор остались открытыми вопросы об аппроксимации решений и сходимости применяемых методов, не получены оценки скорости сходимости методов. Одной из важнейших является задача построения эффективных, высокоскоростных алгоритмов расчета поверхностных токов на экране, использующих современные кластерные технологии.

Цель работы:

– разработка математического аппарата для исследования задачи дифракции на плоском экране произвольной формы; построение эффективного численного метода; доказательство теорем об аппроксимации и сходимости и получение оценки скорости сходимости;

– программная реализация параллельного вычислительного алгоритма, позволяющего решать поставленную задачу дифракции на экранах произвольной формы;

– программная реализация концепции построения субиерархических алгоритмов и вспомогательных баз данных для решения задачи дифракции на плоских экранах произвольной формы.

Научная новизна:

– разработан новый математический аппарат для исследования поставленной задачи, в частности, введено понятие оператора, эллиптического на подпространствах, и доказана теорема о сходимости метода Галеркина для таких операторов. Доказана теорема об аппроксимации функциями Рао–Уилтона–Глиссона (RWG) любой функции из пространства W. Получены оценки скорости сходимости метода RWG;

– предложен и программно реализован субиерархический параллельный вычислительный алгоритм, позволяющий решать задачу дифракции на плоских экранах произвольной формы;

– получены аналитические решения для скалярных задач на круге.

Практическая значимость.

Большое практическое значение в представленной работе имеет концепция субиерархического параллельного вычислительного алгоритма. Используя параллельные вычисления на кластере, один раз наиболее точно решается задача дифракции на экране простейшей прямоугольной формы. Далее, используя результаты решенной задачи, «вырезается» из него другой экран произвольной формы, целиком умещающийся в уже посчитанном, и, не производя повторных вычислений в матрице СЛАУ, определяется значение поверхностных токов на новом экране. Результаты расчета поверхностных токов на экране произвольной формы получаются за счет составления новой матричной системы уравнений из элементов уже посчитанной матрицы. Данный подход имеет большое практическое значение в инженерных расчетах.

Реализация и внедрение полученных результатов.

Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты НИР и грантов, выполненных на кафедре математики и математического моделирования ПГУ: гранты РФФИ 01-01-00053 и 03-07-90274, грант ФЦП «Интеграция» И0983/905.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались на научных конференциях и семинарах:

– Международной конференции «Antenna Theory and Techniques» (Sevastopol, Ukraine, 1999);

– Международной конференции «Application of the conversion research results for international cooperation» (Tomsk, 1999);

– Международной конференции «Актуальные проблемы науки и образования» (Пенза, 2003);

– Международной конференции «Mathematical and Computation Modeling with Applications in Paper Manufacturing Science and Converting» (Karlstad, Sweden, June 6–8, 2005);

– Научном семинаре НИВЦ МГУ (2005).

Публикации.

По материалам диссертации опубликовано 7 печатных работ, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы, содержащего 73 наименования. Работа изложена на 107 страницах машинописного текста, содержит 18 графиков.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится обзор работ по теме диссертации и вопросам, примыкающим к ней; обосновывается актуальность темы, формулируется цель работы, излагаются краткое содержание и основные результаты работы.

Первая глава посвящена постановке задачи дифракции на плоском, ограниченном, бесконечно тонком и идеально проводящем экране и основным свойствам решений уравнений электрического поля. Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля E^0, H^0 на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω, расположенном в свободном пространстве с волновым числом $k, k^2 = \omega^2\mu(\varepsilon + i\sigma\omega^{-1}), \operatorname{Im} k \geq 0 \ (k \neq 0)$, состоит в определении рассеянного электромагнитного поля

$$E, H \in C^2(R^3 \setminus \overline{\Omega}) \bigcap_{\delta>0} C(\overline{R}^3_+ \setminus \Gamma_\delta) \bigcap_{\delta>0} C(\overline{R}^3_- \setminus \Gamma_\delta), \qquad (1)$$
$$\Gamma_\delta := \{x : dist(x, \partial\Gamma) < \delta\},$$

удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла

$$\operatorname{Rot} H = -ikE,$$
$$\operatorname{Rot} E = ikH, \quad x \in R^3 \setminus \overline{\Omega}, \qquad (2)$$

краевым условиям для касательных составляющих электрического поля на поверхности экрана

$$E_\tau|_\Omega = -E^0_\tau|_\Omega, \qquad (3)$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства

$$E, H \in L^2_{loc}(R^3) \qquad (4)$$

и условиям на бесконечности (условия Зоммерфельда)

$$r\left(\frac{\partial E}{\partial r} - ikE\right) \to 0, \ r\left(\frac{\partial H}{\partial r} - ikH\right) \to 0, \qquad (5)$$
$$\text{при } r := |x| \to \infty.$$

Будем предполагать, что все источники падающего поля находятся вне экрана $\overline{\Omega}$

$$E, H \in C^2(R^3 \setminus \overline{\Omega}), \ E_t \in C\left(R^3 \setminus \partial\overline{\Omega}\right). \qquad (6)$$

Имеют место утверждения 1–3 для поставленной задачи.[1]

Утверждение 1. *Если задача (1) – (5) при* $\operatorname{Im} k \geq 0, \ k \neq 0$ *имеет решение, что оно единственно.*

Поставленная задача может быть сведена к векторному псевдодифференциальному уравнению на Ω

---

[1] Ильинский А. С. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский , Ю. Г. Смирнов. – М.: ИПРЖР, 1996.

$$Lu = (\mathrm{grad}A(Divu) + k^2 Au)\Big|_t = f, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

где A означает интегральный оператор

$$Au = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} u(y)\,\mathrm{d}\,s,$$
$$f = 4\pi k E_\tau^0\Big|_\Omega; \tag{8}$$

Div – является касательной дивергенцией на Ω;

u – плотность тока на поверхности Ω;

$(.)\big|_t$ – взятие касательных компонент.

Определим пространство W как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме

$$\|\mathrm{u}\|_w^2 = \|\mathrm{u}\|_{-1/2}^2 + \|\mathrm{Divu}\|_{-1/2}^2.$$

Можно показать, что

$$W = \left\{u \in \widetilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega}) : Divu \in \widetilde{H}^{-1/2}(\overline{\Omega})\right\},$$

где пространство Соболева $\widetilde{H}^s(\overline{\Omega})$ определяем обычным образом.

Через W' обозначено антидвойственное пространство для W относительно полуторалинейной формы $(f,v) = \int_\Omega f \cdot \bar{v}\,\mathrm{d}x$.

$$W' = \left\{u\big|_\Omega : u \in H^{-1/2}(M), \mathrm{Rot}u \in H^{-1/2}(M)\right\},$$

где M – замкнутая поверхность, такая, что $\overline{\Omega} \in M$. Пространство W имеет следующее важное свойство. Пусть W_1 и W_2 – подпространства пространства W, такие, что

$$W_1 := \{u \in W; Divu = 0\},\ W_2 := \{u \in W; \mathrm{Rot}u = 0\},$$

(здесь Div и Rot – касательные дивергенция и ротор на Ω).

Утверждение 2. *Пространство* W *может быть разложено в виде прямой суммы подпространств* W_1 *и* W_2*:* $W = W_1 \oplus W_2$ Аналогично $W' = (W_1)' \oplus (W_2)'$.

Утверждение 3. *Для* $\operatorname{Im} k \geq 0$ *и* $k \neq 0$ *существует единственное решение следующего уравнения:*

$$L(k)u = f, \quad u \in W, \; f \in W', \tag{9}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} W^1 \\ W^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $L_1 = k^2 (1-\Delta)^{-1/2} + K_{11}$, $L_2 = -(1-\Delta)^{1/2} + K_{22}$;

K_{ij} – компактные операторы; Δ – оператор Лапласа.

Таким образом, оператор L *не является эллиптическим при вещественных* $k \neq 0$.

Определение 1. *Оператор* $T : W \to W'$ *будем называть коэрцитивным на подпространствах, если существуют константы* $C_1, ..., C_m$ (> 0), *такие, что*

$$|(Tu,u)| \geq C_j \|u\|_W^2 \text{ для любого } u \in W_j, \; j = 1, ..., m.$$

Определение 2. *Оператор* $T : W \to W'$ *будем называть эллиптическим на подпространствах, если существует линейный компактный оператор* $K : W \to W'$, *такой, что оператор* $T + K$ *– коэрцитивный на подпространствах.*

Теорема 1. *Коэрцитивный на подпространствах оператор* T *имеет ограниченный обратный* $T^{-1} : W' \to W$.

В конце главы в таблице приведены полученные аналитические решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца на круге при $k = 0$, используемые для тестирования алгоритмов.

Правая часть $g(\rho,\varphi)$	Решение $\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right](\rho,\varphi)$
1	$\frac{4}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}$
ρ	$1+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}+\frac{\rho^2}{\sqrt{1-\rho^2}\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)}-2\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)$
$e^{-i\varphi}$	$\left(\frac{2\rho}{\sqrt{1-\rho^2}\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)}+\frac{1}{\rho}\right)e^{-i\varphi}$
$\rho^2 e^{-i\varphi}$	$\frac{3}{2}\left(\rho+\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}+\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^2}\left(1+\sqrt{1-\rho^2}\right)}-2\rho\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right)\right)e^{-i\varphi}$

Вторая глава посвящена алгоритму решения уравнения электрического поля для произвольной поверхности. Рассмотрим уравнение $Lu = f$ и n-мерные пространства $V_n \subset W$. Будем проводить аппроксимации u элементами $u_n \in V_n$. Методом Галеркина находим u_n из системы уравнений

$$(Lu_n, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_n. \tag{10}$$

Эти уравнения определяют конечномерный оператор $L_n : V_n \to V_n'$, где V_n' есть *антидвойственное* пространство к V_n.

Основная трудность для уравнений электрического поля (9) состоит в том, что оператор L не является сильно эллиптическим и традиционные теоремы о сходимости метода Галеркина не применимы. Результаты о сходимости метода Галеркина удается обобщить на уравнения с операторами, эллиптическими на подпространствах, в том числе на уравнение электрического поля (9), так как оператор L является эллиптическим на подпространствах.

Теорема 2. *Пусть n-мерные подпространства V_n обладают аппроксимационными свойствами в W. Тогда метод Галеркина (10) на подпространстве V_n сходится для уравнения (9).*

Рассмотрим вопрос об аппроксимации непрерывно-дифференцируемой (векторной) функции f в прямоугольнике $\Pi = [0,a]\times[0,b]$ базисными функциями $\varphi_j(x,y)$ по методу RWG (рис. 1).

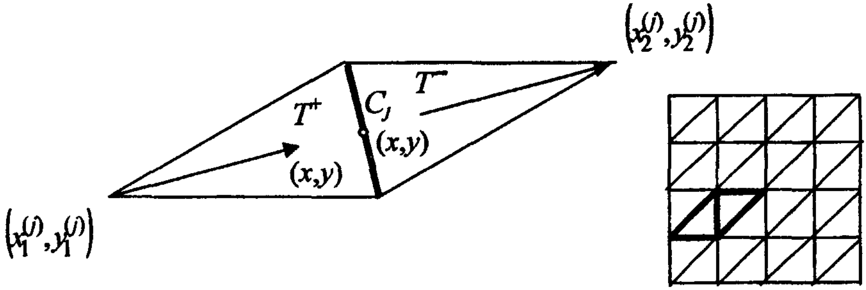

Рис. 1

$$\varphi_j(x,y) = \begin{cases} \left(x - x_1^{(j)}, y - y_1^{(j)}\right)\dfrac{l_j}{2S_j^+} & \text{в } T_j^+ \\ \left(x_2^{(j)} - x, y_2^{(j)} - y\right)\dfrac{l_j}{2S_j^-} & \text{в } T_j^- \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пусть в прямоугольнике Π выбрана равномерная прямоугольная сетка с шагом h_1 по переменной x и шагом h_2 по переменной y. Рассмотрим конечномерное подпространство $X_N = \operatorname{span}\{\varphi_1,\dots,\varphi_N\}$, являющееся линейной оболочкой базисных функций φ_j, $1,\dots,N$, где N – количество внутренних ребер сетки. Нетрудно проверить, что $\varphi_j \in W(\Pi)$, $X_N \subset W$. Имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* $\dfrac{h_1}{h_2} \le M$, $\dfrac{h_2}{h_1} \le M$ *для некоторого* M. *Тогда для любого* $\varphi \in W$ $\inf\limits_{\psi\in X_N} \|\psi - \varphi\|_W \to 0$, $N\to\infty$ *и, верна оценка*

$$\inf_{\psi\in X_N} \|\psi - \varphi\|_W \le C_0(h_1 + h_2)\|\varphi\|_{C^2(\overline{\Pi})},$$

где C_0 *не зависит от* h_1 *и* h_2, *если* $\varphi \in W \cap C^2(\overline{\Pi})$.

Из теорем 2 и 3 получаем сходимость метода Галеркина с базисными функциями RWG с квазиоптимальной оценкой скорости сходимости.

Теорема 4. *Пусть* $\frac{h_1}{h_2} \le M, \frac{h_2}{h_1} \le M$ *для некоторого* M. *Тогда метод Галеркина (10) для уравнения электрического поля (9) сходится с выбором базисных функций* RWG *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|u - u_N\|_W \le C_0 \inf_{\psi \in X_N} \|\psi - u\|_W,$$

где u, u_N *– точное и приближенные решения, а константа* C_0 *не зависит от* h_1 *и* h_2.

Теорема 4 полностью теоретически обосновывает применимость метода RWG для решения задачи дифракции.

Третья глава содержит описание численных результатов и сравнение их с результатами, полученными в работах других авторов. В данной работе предлагается подход, названный субиерархическим. В нем на первом шаге (уровне) один раз наиболее точно решается задача дифракции на экране простейшей прямоугольной формы. Далее, используя результаты решения задачи на первом шаге, «вырезаем» из него другой экран произвольной формы и, не производя повторных вычислений в матрице СЛАУ, определяем значение поверхностных токов на новом экране. Таким образом, можно создать базу данных матричных элементов и решить серию задач дифракции на экранах различной формы. Субиерархический метод используется совместно с параллельными вычислительными алгоритмами в связи с большой вычислительной сложностью формирования матрицы СЛАУ на первом этапе. Наиболее удобно рассчитывать подобные задачи на кластере. Предложенный метод позволяет решать задачи дифракции для экранов произвольной формы, используя результаты решения только одной задачи. Это возможно в том случае, если «новый» экран произвольной формы целиком помещается в «старом» прямоугольном экране. Эффект от использования субиерархического метода будет проявляться при решении большой серии задач дифракции. Построенная база данных оказывается весьма полезной и позволяет решать задачи дифракции на экранах нужной формы уже на персональном компьютере, а не на кластере, который использовался при решении первой задачи на прямоугольном экране (рис. 2).

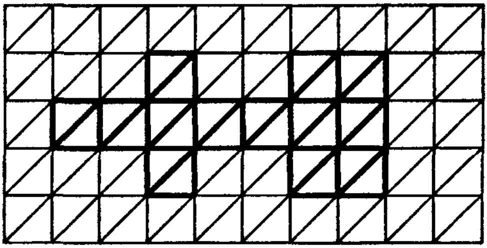

Рис. 2

В связи с большими вычислительными объемами при решении задачи упростим процессы, связанные с составлением матричного уравнения за счет использования параллельных алгоритмов. Каждый элемент матрицы формируется независимо друг от друга. За счет этого можно рассчитать матрицу на нескольких процессорах. Предположим, используется p процессоров, в этом случае время, затраченное на составление всей матрицы, сократится примерно в p раз.

Пусть расширенная матрица СЛАУ состоит из n строк и в нашем распоряжении p процессоров. Задание на заполнение матрицы распределяется следующим образом:

- 1-й процессор заполняет строки с номерами $1 \ldots \left[\frac{n}{p}\right]$;
- 2-й процессор заполняет строки с номерами $\left[\frac{n}{p}\right]+1 \ldots 2\cdot\left[\frac{n}{p}\right]$;
- ....
- $p-1$-й процессор заполняет строки $(p-2)\cdot\left[\frac{n}{p}\right]+1 \ldots (p-1)\cdot\left[\frac{n}{p}\right]$;
- p-й процессор заполняет строки $(p-1)\cdot\left[\frac{n}{p}\right]+1 \ldots n$.

После того, как заполнение матрицы завершено, всеми процессорами, запускается процедура сбора матрицы на одном из процессоров. На этом же процессоре производим решение системы линейных уравнений.

Матрица задачи рассчитывалась на кластерах НИВЦ МГУ с использованием 130 процессоров. Размер матрицы составлял 6673×6674 элементов. Время расчета составило 69 ч.

В данной главе были получены результаты решения задачи дифракции электромагнитной волны на экранах различной формы (прямоугольник, крест, круг и другие формы). Результаты решения задач дифракции электромагнитной волны на экране прямоугольной и сложной формы были сравнены с работами следующих авторов: P. M. van den Berg, A. W. Glisson, S. M. Rao, D. R. Wilton. Результаты сравнений совпадают с графической точностью. Для реализации поставленной задачи было написано четыре программных модуля. Вычисления производились с использованием кластера НИВЦ МГУ.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Строго обосновано применение метода Галеркина для решения уравнения электрического поля: доказана теорема об аппроксимации функциями RWG любой функции из пространства W и сходимости метода Галеркина, получены оценки скорости сходимости метода RWG.

2. Получены аналитические решения для скалярных задач на круге.

3. Предложен и программно реализован параллельный вычислительный алгоритм, позволяющий решать задачу дифракции на плоских экранах произвольной формы.

4. Предложена и программно реализована концепция построения субиерархических алгоритмов и вспомогательных баз данных для решения задачи дифракции на плоских экранах произвольной формы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Медведик, М. Ю. Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – 2004. – № 5. – С. 3–19.

2. Медведик, М. Ю. Исследования задачи дифракции акустической волны на диске. Системный анализ, управление и обработка информации / М. Ю. Медведик // Сб. науч. тр. университетского семинара. – Пенза, 2001. – № 1. – С. 36–43.

3. Медведик, М. Ю. Метод псевдодифференциальных уравнений для решения электромагнитной задачи дифракции на прямоугольной пластине / М. Ю. Медведик // Актуальные проблемы науки и образования. – Пенза: ИИЦ Пенз. гос. ун-та, 2003. – Т. 1. – С. 26–28.

4. Медведик, М. Ю. Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.

5. Smirnov, Yu. G. Pseudodifferential Equations Method for Solving of Problem of Electromagnetic Wave Diffraction on Conducting Screens / Yu. G. Smirnov, A. A. Vartanov, M. Yu. Medvedik // Antenna Theory and Techniques: proceedings of 3rd International Conference, Sevastopol, Ukraine, 8–11 September, 1999. – P. 150–151.

6. Smirnov, Yu. G. Pseudodifferential Equations Method for Solving of Electromagnetic Wave Diffraction Problem on Conducting Screens / Yu. G. Smirnov, M. Yu. Medvedik // Application of the conversion research results for international cooperation (SIBCONVERS'99): proceedings of the Third International Symposium Tomsk, 1999. – Vol. 1. – P. 61–62.

7. Smirnov, Yu. G. Solution to Three-Dimensional Vector Electromagnetic Diffraction Problems on Screens by the Method of Pseudodifferential Equations Using Supercomputing / Yu. G. Smirnov, M. Yu. Medvedik // Mathematical and Computation Modeling with Applications in Paper Manufacturing Science and Converting (MAPS'05): international Conference Karlstad, Sweden, 6–8 June, 2005. – P. 17.

Медведик Михаил Юрьевич

Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения электромагнитных задач дифракции на плоских экранах

Специальность 01.01.07 – Вычислительная математика

Редактор *Т. Н. Судовчихина*
Технический редактор *Н А. Вьялкова*
Корректор *С. Н. Сухова*
Компьютерная верстка *Н В. Ивановой*

ИД № 06494 от 26.12.01

Сданo в производство 14.07.05. Формат 60х84 1/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 0,93.
Заказ № 459. Тираж 100.

Издательство Пензенского государственного университета.
440026, Пенза, Красная, 40