

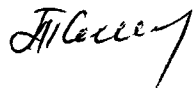
МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Чувашский государственный университет имени И.Н.Ульянова

УДК 532.5

На правах рукописи

Смирнова Татьяна Николаевна



**ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ В
ЧИСЛЕННОМ КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИЦАЕМЫХ ПРОФИЛЕЙ**

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Чебоксары — 2000

Работа выполнена на кафедре прикладной и дискретной математики
Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова

Научный руководитель:

заслуженный деятель науки ЧР,
доктор физико-математических наук,
профессор А.Г. Терентьев

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Д.В. Маклаков

кандидат физико-математических наук,
доцент В.Н. Васильев

Ведущая организация:

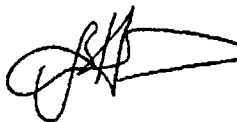
Кемеровский государственный университет

Защита состоится 21 апреля 2000 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета К 064.15.02 в Чувашском государственном университете им. И.Н. Ульянова по адресу: 428015, г. Чебоксары, Московский проспект, д. 15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Чувашского государственного университета.

Автореферат разослан 15 марта 2000 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент



В.В. Никитин

A2000
3745

Общая характеристика работы.

Диссертационная работа посвящена разработке алгоритмов численного конформного отображения при помощи метода граничных элементов как ограниченных, так и неограниченных областей конечной связности на канонические области и их применения к задачам гидродинамики.

Актуальность темы. Известно, что многие задачи гидродинамики наиболее просто исследуются по следующей схеме: конформное отображение физической области на некоторую каноническую область вспомогательной плоскости, в которой аналитически решается исходная задача. При этом основной трудностью является построение конформно отображающей функции. Поэтому составление эффективного алгоритма численного конформного отображения заданной области на какую-либо каноническую представляет собой практический интерес.

Целью диссертационной работы является разработка метода численного отображения областей конечной связности на канонические, а также алгоритма построения такого отображения на основе метода граничных элементов (МГЭ) и их применение к задачам гидродинамики плоских течений.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1) на основе аналитических решений, выраженных через ζ -функции Якоби, дан алгоритм расчета конформного отображения внешности двух разрезов на внутренность прямоугольника и проведены многочисленные числовые расчеты;

2) построен алгоритм численного конформного отображения конечных, а также бесконечных областей заданной связности на некоторые канонические области с использованием МГЭ;

3) численно-аналитически решена задача безотрывного обтекания одиночного профиля с проницаемыми участками безграничным потоком идеальной несжимаемой жидкости;

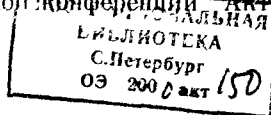
4) аналитически решена задача обтекания проницаемой пластины вблизи экрана;

5) численно-аналитически решена задача безотрывного обтекания проницаемого профиля вблизи экрана потоком идеальной несжимаемой жидкости.

Достоверность результатов работы обеспечивается применением строгих математических методов, сравнением результатов численных расчетов с различными предельными решениями, а также сравнения с известными точными аналитическими решениями.

Практическая ценность. Результаты диссертационной работы могут быть использованы при численном конформном отображении, а также в теории проницаемых профилей и при проектировании крыловых профилей.

Апробация работы. Основные результаты диссертации по мере их получения докладывались и обсуждались на Международной научной конференции "Optimization of Finite Element Approximations" (г. С.-Петербург, 1995 г.); на Международной научно-технической конференции "Актуаль-



ные проблемы математического моделирования и автоматизированного проектирования в машиностроении” (г. Казань, 1995 г.); на научной конференции ”Динамика сплошных сред со свободными границами”, посвященной 60-летию заслуженного деятеля науки Чувашской Республики, академика НАНИ ЧР, профессора А.Г. Терентьева (г. Чебоксары, 1996 г.); на VI Всероссийской научной школе ”Гидродинамика больших скоростей” (г. Чебоксары, 1996 г.); на Всероссийской научной конференции ”Краевые задачи и их приложения” (г. Казань, 1999 г.); на Международной конференции ”Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности – 2000” (г. Уфа, 2000 г.); на научном семинаре ”Взаимодействие сплошных сред” под руководством профессора А.Г. Терентьева в г. Чебоксары.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы из 103 наименований. Главы разбиты на параграфы, общее число которых 12. Работа изложена на 128 страницах, содержит 93 рисунка и 23 таблицы.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы и цели диссертации, дан обзор литературы по затронутым вопросам, кратко изложено содержание работы и сформулированы основные результаты, выносимые на защиту. Разработке численных методов конформного отображения посвящены работы М.А. Лаврентьева, Б.В. Шабата, П.Ф. Фильчакова, В.П. Фильчаковой, Л.В. Канторовича, М.В. Келдыша, А.Л. Кудрявцева, Г.А. Николаевой, П.В. Мелентьева и многих других авторов. В диссертации основное внимание уделено составлению алгоритмов построения конформно отображающих функций на основе метода граничных элементов и их применению в теории проникаемых профилей. Исследование проникаемых профилей отражено в трудах Н.Б. Ильинского, А.М. Елизарова, А.В. Поташева, А.И. Некрасова, А.В. Галанина, А.Г. Терентьева, В. Проснака, П. Кухарчика, Д.В. Маклакова.

Первая глава посвящена построению в явном виде функций, конформно отображающих некоторые двусвязные области на прямоугольник. Полученные результаты использованы в последующих двух главах. Общий вид функций, отображающих двусвязные области на прямоугольник получен Л.И. Седовым, М.В. Келдышем, В. Коппенфельсом, Ф. Штальманом. Частные случаи рассмотрены А.Г. Терентьевым, А.В. Галаниным, В. Проснаком, А.В. Кузнецовым, В.Н. Васильевым.

В § 1 рассмотрена задача отыскания функции, конформно отображающей плоскость с двумя параллельными разрезами на параметрический прямоугольник с вершинами в точках $0, \pi, \pi + \pi\tau/2, \pi\tau/2$ ($\tau = it$ – чисто мнимое число). Показано, что эта функция может быть представлена в виде:

$$z(u) = (A + iB) \frac{\vartheta_1'(u - i\sigma)}{\vartheta_1(u - i\sigma)} + (A - iB) \frac{\vartheta_1'(u + i\sigma)}{\vartheta_1(u + i\sigma)} + C + iD, \quad (1.1)$$

где $i\sigma$ – образ бесконечно удаленной точки плоскости z ; $\vartheta_1(u)$ – тэта-функция Якоби.

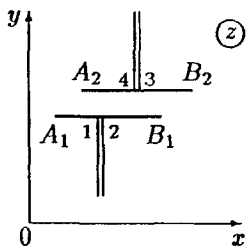


Рис. 1.1

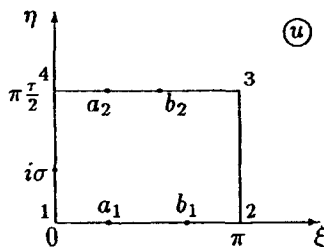


Рис. 1.2

Из условий нарушения конформности отображения (1.1) в точках A_1, B_1, A_2, B_2 и геометрических условий найдены десять неизвестных параметров $a_1, b_1, a_2, b_2, \sigma, t, A, B, C, D$.

Случай двух произвольно ориентированных отрезков рассмотрен в § 2. Функция, отображающая внешность двух разрезов на прямоугольник, имеет вид:

$$z(u) = (A + iB) \frac{\vartheta_1(u - \beta)\vartheta_1(u - \bar{\beta})}{\vartheta_1(u - i\alpha)\vartheta_1(u + i\alpha)} + C + iD. \quad (2.1)$$

Здесь $i\alpha$ и $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ – образы бесконечно удаленной точки плоскости z и точки пересечения прямых, проходящих через заданные отрезки A_1B_1 и A_2B_2 . Как и в предыдущем случае, из условий нарушения конформности отображения (2.1) в точках A_1, B_1, A_2, B_2 и геометрических условий найдены двенадцать неизвестных постоянных $a_1, b_1, a_2, b_2, \alpha, t, \beta_1, \beta_2, A, B, C, D$.

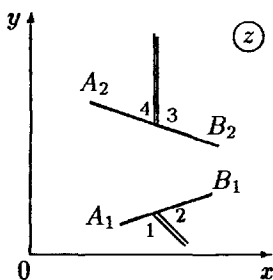


Рис. 2.1

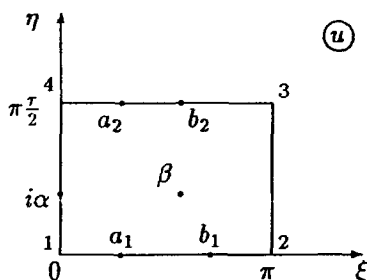


Рис. 2.2

В § 3 рассмотрены два частных случая отображения верхней полуплоскости с разрезом на прямоугольник.

1. В случае разреза, непараллельного действительной оси, отображающую функцию записывается в виде:

$$z(u) = C \left(e^{-i\alpha} \frac{\vartheta_4(a + \alpha)}{\vartheta_4(a)} - \frac{\vartheta_1(u + \alpha)}{\vartheta_1(u)} \right). \quad (3.1)$$

Из условий нарушения конформности отображения (3.1) в точках A и B и

геометрических условий определены неизвестные параметры a, b, C, t

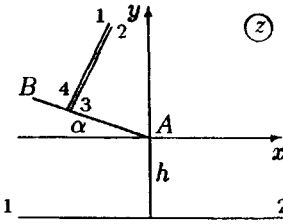


Рис. 3.1

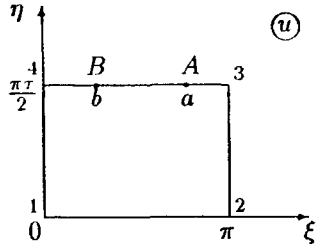


Рис. 3.2

2. Отображение верхней полуплоскости с горизонтальным разрезом на прямоугольник осуществляется с помощью функции

$$z_0(u) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} z(u) = h_0 \left(\frac{\vartheta'_4(a)}{\vartheta_4(a)} - \frac{\vartheta'_1(u)}{\vartheta_1(u)} - i \right), \quad (3.2)$$

где $h_0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} C \frac{\vartheta_4(a + \alpha)}{\vartheta_4(a)} = C \alpha$. Полуплоскость с горизонтальным разрезом имеет гидродинамический смысл, а именно, она совпадает с областью изменения комплексного потенциала бесциркуляционного обтекания наклонной пластины вблизи стенки.

В § 4 рассмотрено отображение области D_2 – верхней полуплоскости с незамкнутым разрезом на прямоугольник.

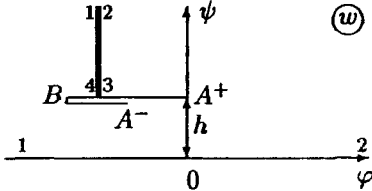


Рис. 4.1

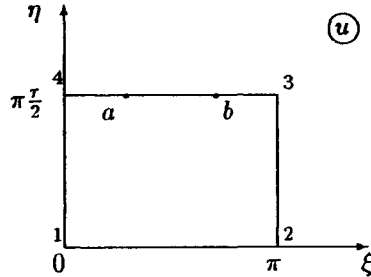


Рис. 4.2

Отображающая функция имеет виде:

$$w(u) = -C \left(\frac{\vartheta'_1(u)}{\vartheta_1(u)} - u \ln'' \vartheta_4(a) \right). \quad (4.1)$$

Длина верхнего берега BA^+ равна l^+ , а нижнего BA^- – l^- . Область D_2 имеет гидродинамическую аналогию с областью изменения комплексного потенциала циркуляционного обтекания профиля вблизи экрана. Разность $l^+ - l^-$ совпадает со значением циркуляции Γ по контуру C_2 . Из геометрических условий определены три неизвестных постоянных C, a, t .

Результаты числовых расчетов предыдущих параграфов представлены

в виде таблиц и графиков ¹.

Вторая глава посвящена численному построению отображающих функций. Предложен численный алгоритм построения функции $W(z) = U(z) + iV(z)$, реализующей конформное отображение односвязных (ограниченных и неограниченных) и двусвязных (неограниченных) областей на некоторые канонические области с использованием метода граничных элементов. В данной работе рассматриваются постоянные граничные элементы.

В § 5 кратко излагается суть МГЭ, состоящая в преобразовании дифференциального уравнения в частных производных в интегральное уравнение, определяющее только граничные значения и численного решения этого уравнения ². Применение обобщенного интегрального соотношения Грина к действительной и мнимой частям аналитической в области D_z функции $W(z) = U(z) + iV(z)$ приводит к двум интегральным уравнениям:

$$\varepsilon(z)\varphi(z) + \int_{C_z} \varphi(t)G_n(z,t)ds(t) = \int_{C_z} \varphi_n(t)G(z,t)ds(t), \quad (5.1)$$

$$\varepsilon(z)\psi(z) + \int_{C_z} \psi(t)G_n(z,t)ds(t) = \int_{C_z} \psi_n(t)G(z,t)ds(t), \quad (5.2)$$

где C_z – граница области D_z ; $G(z) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|z-t|}$ – функция Грина двумерного уравнения Лапласа, $z \in D_z$ и $t \in C_z$. Множитель $\varepsilon(z)$ зависит от расположения точки z и поведения в ней границы C_z и равен $\omega(z)/(2\pi)$. Здесь $\omega(z)$ – величина внутреннего угла односторонних касательных к контуру C_z в точке z . Буквенными индексами обозначены частные производные соответствующих функций по единичной внешней нормали \vec{n} к C_z . Контур C_z обходится так, что область остается слева.

Следует заметить, что эти интегральные соотношения справедливы лишь для однозначных и дважды дифференцируемых функций $U(z)$ и $V(z)$. Во многих задачах искомые функции могут иметь определенные особенности как внутри области ($z = a$), так и на границе ($z = c$), а также в бесконечно удаленной точке. Поэтому в диссертации используются обобщенные соотношения Грина, полученные А. Г. Терентьевым ³. Формулы (5.1), (5.2) в этом случае принимают вид

$$\varepsilon(z)\varphi(z) + \int_{C_z} \varphi(t)G_n(z,t)ds(t) = \int_{C_z} \varphi_n(t)G(z,t)ds(t) + Re F(z), \quad (5.3)$$

¹Все числовые расчеты диссертации проводились в математическом пакете программ MathCad 2.5

²Бреббиа К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М: Мир, 1987. 524 с.

³Терентьев А. Г. Численное исследование в гидродинамике // Изв. АН ЧР. 1994. Вып. 1. № 2. С. 61-84

$$\varepsilon(z)\psi(z) + \int_{C_z} \psi(t)G_n(z, t)ds(t) = \int_{C_z} \psi_n(t)G(z, t)ds(t) + \text{Im} F(z), \quad (5.4)$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^m B_k z^k + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(z-a)^k} + \frac{D}{2(z-c)}, \quad (5.5)$$

где функция (5.5) учитывает все особенности $W(z)$.

В § 6 кратко изложена методика дискретизации МГЭ:

1) граница C_z заменяется многоугольником, стороны которого называются элементами; длина k -го элемента обозначается через l_k ;

2) на каждом элементе искомая функция аппроксимируется специальным образом.

В данной работе использованы постоянные элементы, т.е. искомая функция считается постоянной и равной ее значению в середине элемента.

Используя эту методику, уравнения (5.3), (5.4) можно переписать в матричном виде:

$$H\varphi = B\varphi_n + f_1, \quad H\psi = B\psi_n + f_2, \quad (6.1)$$

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij}, & i \neq j, \\ \hat{H}_{ij} + \varepsilon_i, & i = j, \end{cases} \quad \hat{H}_{ij} = \int_{C_j} G_n(z, t)ds(t), \quad B_{ij} = \int_{C_j} G(z, t)ds(t),$$

здесь $i, j = \overline{0, N}$, $\varphi, \psi, \varphi_n, \psi_n$ - вектор-столбцы значений потенциала, функции тока и их нормальных производных в узлах $\{z_k\}_0^N$ границы; f_1, f_2 - вектор-столбцы значений действительной и мнимой части функции $F(z)$ (5.5) в контрольных точках.

В этом параграфе приведены также точные формулы расчета компонентов матриц H и B для случая постоянных и линейных элементов⁴.

В § 7 рассмотрено отображение ограниченных односвязных областей D_z (с границей C_z) на канонические области D_w (с границей C_w).

Если D_w - плоскость с горизонтальным разрезом или верхняя полуплоскость, то мнимая часть отображающей функции принимает постоянные значения на C_z . Следовательно, задача конформного отображения сводится к задаче Дирихле для функции $V(z)$ с граничным условием $V(z) = \text{const}$, $z \in C_z$ или к задаче Неймана для функции $U(z)$ с граничным условием

$$\frac{\partial U(z)}{\partial n} = 0, \quad z \in C_z.$$

7.1. Отображение на плоскость с горизонтальным разрезом. Пусть D_w - плоскость с горизонтальным разрезом и в качестве условий нормировки выбраны следующие соотношения: $W(z_A) = w_A$, $z_A \in C_z$, $w_A \in C_w$; $W(z_0) = \infty$, $z_0 \in D_z$. В этом случае отображающую функцию можно рассматривать как комплексный потенциал течения (в замкнутой

⁴Терентьев А.Г., Афанасьев К.Е. Численные методы в гидродинамике / Учеб. пособие. Чебоксары: Изд-во чуваш ун-та, 1987. 80 с.

области), индуцированного диполем, расположенным во внутренней точке z_0 . Функция $W(z)$ имеет простой полюс в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и выражение (5.5) принимает вид $F(z) = \frac{a+ib}{z-z_0}$, где параметры a и b заранее неизвестны. При этом соотношения (5.3) и (5.4) имеют вид:

$$\varepsilon(z)U(z) + \int_{C_z} U(t)G_n(z,t)ds(t) = af(z) + bg(z), \quad (7.1)$$

$$\int_{C_z} v(t)G(z,t)ds(t) = -ag(z) + bf(z), \quad (7.2)$$

$$f(z) = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}, \quad g(z) = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

Здесь $v(s) = -\frac{\partial V(s)}{\partial n} = \frac{\partial U(s)}{\partial s} \Big|_{s \in C_z}$; s - дуговая абсцисса.

На рис. 7.1 показана зависимость $U = U(s/2\pi)$ для окружности $|z| = 1$ (s - дуговая абсцисса) и различных z_0 : (1) - $z_0 = 0$; (2) - $z_0 = 0.5 + 0.5i$; (3) - $z_0 = 0.5$. Считается, что $W(1) = 1$; $W(z_0) = \infty$. Сплошные кривые соответствуют распределению потенциала, полученного аналитически, а геометрическими значками - с помощью МГЭ

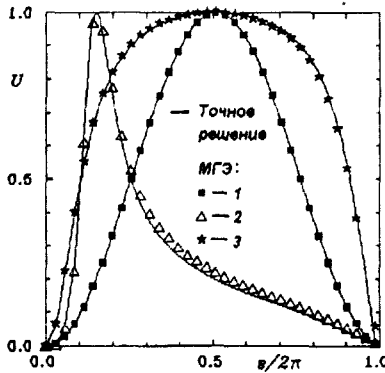


Рис. 7.1

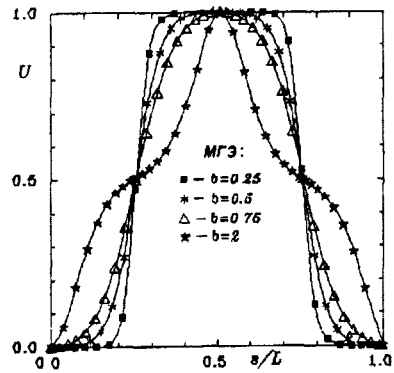


Рис. 7.2

На рис. 7.2 представлен график зависимости $U = U(s/L)$ для эллипса $(x/a)^2 + (y/c)^2 = 1$ с соотношением полюсов $b = c/a$ (s - дуговая абсцисса, L - длина эллипса) и $z_0 = 0$. Считается, что $W(1) = 1$; $W(z_0) = \infty$. Известно, что функция, отображающая внутренность эллипса на внешность разреза $[0,1]$, не может быть выражена с помощью элементарных функций.

7.2. Отображение на верхнюю полуплоскость. Пусть D_w - верхняя полуплоскость $Im(w) \geq 0$ и в качестве условий единственности взяты такие соотношения: $W(z_A) = w_A$, $W(z_B) = w_B$, $W(z_C) = \infty$, причем $z_A, z_B, z_C \in C_z$; $w_A, w_B \in C_w$ и $Im(w_A) = 0$, $Im(w_B) = 0$. В этом случае отображающую функцию можно рассматривать как комплексный

потенциал течения (в замкнутой области), индуцированного диполем, расположенного в граничной точке z_C . Функция $W(z)$ имеет простой полюс в точке $z_C = x_C + iy_C$ и выражение (5.5) примет вид $F(z) = \frac{a + ib}{2(z - z_C)}$, где параметры a, b заранее неизвестны.

Интегральные соотношения (5.3) и (5.4) аналогичны уравнениям (7.1), (7.2), где функции $f(z)$ и $g(z)$ в правой части будут иметь вид

$$f(z) = \frac{x - x_C}{2[(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2]}, \quad g(z) = \frac{y - y_C}{2[(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2]}.$$

На рис. 7.3 показана зависимость $U = U(s/2\pi)$ для окружности $|z| = 1$ (s – дуговая абсцисса) при различных положениях точек z_A, z_B, z_C :

(1): $z_A = 1, z_B = i, z_C = 1$; (2): $z_A = 1, z_B = -0.6 + 0.8i, z_C = -0.31 + 0.95i$;

(3): $z_A = 1, z_B = -0.6 + 0.8i, z_C = -i$.

Считается, что $W(z_A) = 0, W(z_B) = 1, W(z_C) = \infty$. Сплошными кривыми представлено решение, полученное аналитически, а геометрическими значками – с помощью МГЭ.

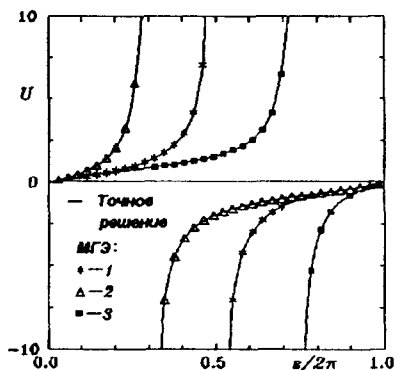


Рис. 7.3

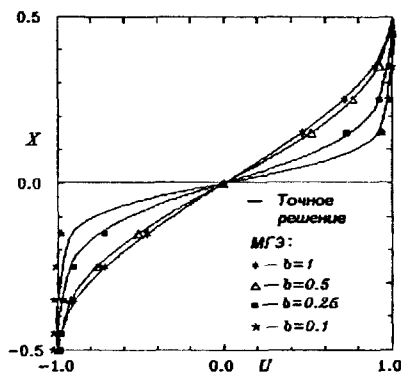


Рис. 7.4

На рис. 7.4 приведены результаты численного конформного отображения прямоугольника с вершинами $A_1(K), A_2(K + iK'), A_3(-K + iK'), A_4(-K)$ на верхнюю полуплоскость (вершинам соответствуют точки $a_1(1), a_2(1/k), a_3(-1/k), a_4(-1)$, а точке $B(iK')$ – бесконечно удаленная точка) для различных соотношений сторон b . Непрерывным кривым соответствует зависимость абсциссы на нижней стороне прямоугольника $X(U)$. Принимая постоянную k ($0 < k < 1$) заданной, размеры прямоугольника можно выбрать следующим образом:

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

В § 8 рассмотрено отображение неограниченных областей на плоскость с горизонтальным разрезом $[w_B, w_A]$. Пусть D_z - внешняя область по отношению к замкнутому контуру C_z и выполнены следующие условия нормировки: $W(z_A) = w_A, z_A \in C_z, w_A \in C_w; W(\infty) = \infty$. В этом случае отображающую функцию $W(z)$ можно интерпретировать как комплексный потенциал бесциркуляционного обтекания контура C_z , который ведет себя при $z \rightarrow \infty$ как сумма $F(z) = B_0 + B_1 z$:

$$B_0 = a_0 + ib_0, \quad B_1 = dW(z)/dz = a_1 - ib_1, \quad z \rightarrow \infty$$

где a_0, b_0, a_1, b_1 заранее неизвестны, причем a_1 и b_1 представляют собой компоненты скорости потока на бесконечности. Величина и направление скорости набегающего потока на бесконечности равны соответственно

$$v_\infty = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{b_1}{a_1}. \quad (8.1)$$

Тогда (5.1) и (5.2) имеют вид:

$$0.5 U(z) + \int_{C_z} U(t) G_n(z, t) ds(t) = a_1 x + b_1 y + a_0, \quad (8.2)$$

$$\int_{C_z} v(t) G(z, t) ds(t) = a_1 y - b_1 x + b_0. \quad (8.3)$$

Задачу можно решить, используя одно из уравнений (8.2) или (8.3), однако совместное их использование повышает точность расчетов.

В § 9 изложен численный алгоритм построения функции $W(z) = U(z) + iV(z)$, конформно отображающей D_w - внешность двух замкнутых контуров C_1 и C_2 на область D_w - плоскость с двумя параллельными разрезами L_1 и L_2 . Функцию $W(z)$ можно рассматривать как комплексный потенциал бесциркуляционного обтекания системы двух профилей. В этом случае мнимая часть $V(z)$ принимает постоянные значения на C_1 и C_2 . Следовательно, задача конформного отображения сводится к задаче Дирихле для функции $V(z)$ с граничными условиями $V(z) = V_1 = \text{const}, z \in C_1$ и $V(z) = V_2 = \text{const}, z \in C_2$ или к задаче Неймана для функции $U(z)$ с граничными условиями

Пусть выполняются следующие условия нормировки: $W(z_A) = w_A, z_A \in C_1, w_A \in L_1$ и $W(\infty) = \infty$.

Здесь $F(z) = z$ и интегральные соотношения (5.3) и (5.4) примут вид:

$$0.5 U(z) + \int_{C_1} U(t) G_n(z, t) ds(t) + \int_{C_2} U(t) G_n(z, t) ds(t) = x, \quad (9.1)$$

$$\int_{C_1} v(t) G(z, t) ds(t) + \int_{C_2} v(t) G(z, t) ds(t) = y + \begin{cases} a_1, & \text{если } t \in C_1, \\ a_2, & \text{если } t \in C_2, \end{cases} \quad (9.2)$$

где a_1, a_2 – неизвестные, равные постоянным значениям $V(z)$ на контурах C_1 и C_2 соответственно; $d = |a_1 - a_2|$ – расстояние между разрезами. Для численного решения уравнение (9.2) дополняется условиями равенства нулю циркуляции скорости по контурам C_1 и C_2 :

$$\sum_{i=0}^{N_1} l_i |v_i| = 0, \quad \sum_{i=N_1}^N l_i |v_i| = 0.$$

Третья глава посвящена приложению численного конформного отображения к задачам обтекания проницаемых крыловых профилей идеальной несжимаемой жидкостью. Аналитическое исследование проницаемых профилей дано в работах L.C. Woods⁵ и А.М. Елизарова, Н.Б. Ильинского и А.В. Поташева⁶.

В § 10 предлагаются численные алгоритмы для расчета аэродинамических характеристик проницаемого крылового профиля с заданным распределением нормальной скорости на границе.

Пусть через участок (s_m, s_n) контура C_z с заданной нормальной скоростью $v_n = q(s)$ происходит протекание жидкости: отсос жидкости из основного потока ($q(s) < 0$) или выдув жидкости в основной поток ($q(s) > 0$). Здесь s – дуговая абсцисса, отсчитываемая от $s = 0$ в задней кромке против часовой стрелки до $s = L$ в той же точке (L – длина контура профиля). В данной работе считается, что при выдуве константы Бернулли в основном потоке и в вытекающей жидкости одинаковы, хотя в реальном процессе они могут отличаться друг от друга. Аналитическое исследование задачи выдува жидкости с разными константами Бернулли было проведено Д.В. Маклаковым⁷.

Поскольку для проницаемого профиля потенциал скорости и функция тока являются неоднозначными функциями, то непосредственно применить метод граничных элементов для решения нельзя. Здесь можно предложить численный алгоритм, состоящий из трех этапов.

1. *Численное конформное отображение* внешности профиля на плоскость комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$ с замкнутым разрезом $[-1, 1]$ с использованием численных процедур § 7. Отображающая функция имеет гидродинамическую аналогию с бесциркуляционным обтеканием непропицаемого профиля. Направление γ и величина v_∞ набегающего потока не фиксируются, а определяется в процессе вычислений (8.1). Для численного решения можно использовать каждое из уравнений (8.2) и (8.3). В качестве тестовой задачи проведено сравнение значений скорости на профилях Жуковского с заостренной (рис. 10.1) и закругленной (рис. 10.2) задней

⁵Woods L.C. The theory of subsonic plane flow Cambridge, Univ Press, 1961. 594 p.

⁶Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Обратные краевые задачи аэродинамики. М.: Наука, 1994. 436 с.

⁷Maklakov D.V. Influence of jet blowing on the aerodynamic characteristics of airfoils // German-Russian Symposium "Airfoil Design for Wings with Boundary-Layer Control". Stuttgart, Germany. 15–17 April 1998

кромкой. На рис. 10.3 и рис. 10.4 непрерывными кривыми показано распределение скорости, полученное аналитически, символами \square – найденное численно решением уравнения (8.3), а значками \diamond – (8.2).

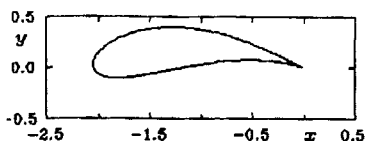


Рис. 10.1

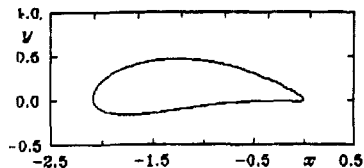


Рис. 10.2

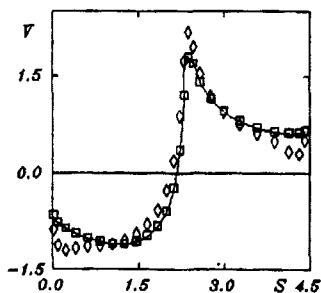


Рис. 10.3

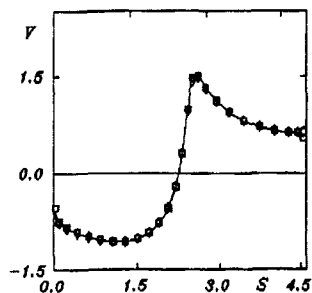


Рис. 10.4

Из этих примеров следует, что для профиля с закругленной задней кромкой оба алгоритма дают практически совпадающие между собой и с точными значения (рис. 10.4). Однако в случае заостренной задней кромки более предпочтительным является алгоритм, основанный на решении уравнения (8.3) (рис. 10.3).

2. Аналитическое конформное отображение плоскости w с разрезом на каноническую область – внешность единичного круга. Можно установить зависимость между значением потенциала $\{\varphi_i\}_0^N$ в узлах и точками единичного круга $\{\tau_i\}_i^N$ плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\tau_i = \begin{cases} \arccos \varphi_i, & \varphi_i - \varphi_{i-1} < 0, \\ 2\pi - \arccos \varphi_i, & \varphi_i - \varphi_{i-1} > 0. \end{cases}$$

3. Аналитическое решение гидродинамической задачи в указанной канонической области.

Рассматриваются два случая распределения источников (стоков): 1) дискретное, когда нормальная скорость на каждом элементе полагается постоянной и равной q_k и отсос (или выдув) на пронизаемом участке можно представить как систему источников интенсивности $q_k l_k$ (l_k – длина k -го элемента), расположенных в середине k -го элемента; 2) непрерывное, т.е. полагается, что источники (стоки) распределены непрерывным образом на пронизаемом участке.

Скорость основного потока на бесконечности в плоскости ζ запишется

в виде

$$\left(\frac{d\tilde{w}}{d\zeta}\right)_{\zeta \rightarrow \infty} = \left(\frac{dW}{dz}\right)_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{dz}{dw}\right)_{w \rightarrow \infty} \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta \rightarrow \infty} = \frac{V_\infty}{2v_\infty} e^{i\gamma}.$$

В случае непрерывного распределения источников (стоков) комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра с проницаемой дугой (τ_m, τ_n) имеет вид:

$$\tilde{w}(\zeta) = \tilde{v}_\infty \left(\zeta e^{i\gamma} + \frac{e^{-i\gamma}}{\zeta} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta + \frac{1}{\pi} \int_{\tau_m}^{\tau_n} q(s(\tau)) \frac{ds(\tau)}{d\tau} \ln \frac{\zeta - \tau}{\sqrt{\zeta}} d\tau,$$

где $\tilde{v}_\infty = \frac{V_\infty}{2v_\infty}$, $V_\infty = 1$. Отсюда при $\zeta = e^{i\tau}$ определяется скорость на цилиндре

$$\tilde{v}(\tau) = -2\tilde{v}_\infty \sin(\tau + \gamma) + \frac{\Gamma}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\tau_m}^{\tau_n} q(s(\tau)) \frac{ds(\tau)}{d\tau} \operatorname{ctg} \frac{\tau - t}{2} d\tau \quad (10.1)$$

и значение циркуляции

$$\Gamma = 4\pi \tilde{v}_\infty \sin \gamma + \int_{\tau_m}^{\tau_n} q(s(\tau)) \frac{ds(\tau)}{d\tau} \operatorname{ctg} \frac{\tau}{2} d\tau.$$

Интеграл в (10.1) понимается в смысле главного значения по Коши.

Скорость на профиле C_z является сложной функцией и записывается в виде:

$$V(s) = \tilde{v}(\tau(s)) v(s) \frac{d\tau}{d\varphi}. \quad (10.2)$$

В качестве примера рассмотрено безотрывное обтекание профиля Жуковского с проницаемыми участками потоком идеальной несжимаемой жидкости. На рис. 10.5 и рис. 10.6 показаны конфигурации профиля Жуковского с отсосом и выдувом (символы Δ и \square означают стоки и источники соответственно). Количество жидкости, протекающей через проницаемые участки в первом и во втором случае примерно одинаковы. На рис. 10.7 и рис. 10.8 непрерывными кривыми с символами \circ показано распределение скорости на непроницаемом профиле, полученное по точным формулам; сплошными кривыми – значение касательной скорости на проницаемом профиле, найденное аналитически, а геометрическими значками \diamond и \bullet – численно для дискретного и непрерывного распределения источников (стоков). Ниже приведены значения циркуляции скорости по непроницаемому контуру (Γ), а также по проницаемому для дискретного (Γ_d) и непрерывного (Γ_n) распределения источников (стоков).

$$q(s) = -1; \Gamma = -2.785; \Gamma_d = -3.467; \Gamma_n = -3.466.$$

$$q(s) = 1; \Gamma = -2.785; \Gamma_d = -3.989; \Gamma_n = -3.985.$$

Из этих примеров следует, что при наличии на контуре источников или стоков абсолютная величина циркуляции по профилю увеличивается по сравнению с непроницаемым контуром.

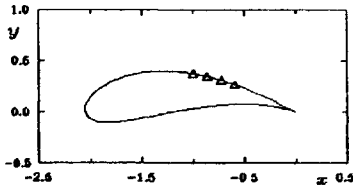


Рис. 10.5

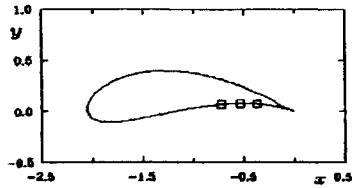


Рис. 10.6

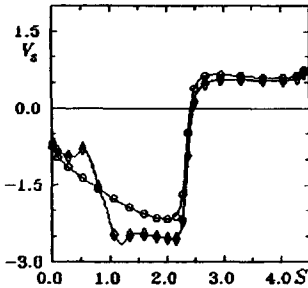


Рис. 10.7

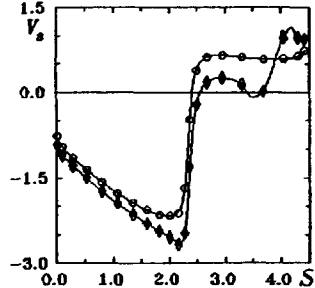


Рис. 10.8

Обтеканию проницаемой пластины, расположенной вблизи экрана, посвящен § 11.

Через проницаемый участок (s_m, s_n) с заданной нормальной скоростью $v_n = q(s)$ происходит протекание жидкости: отсос из основного потока ($q(s) < 0$) или выдув жидкости в основной поток ($q(s) > 0$). Здесь s – дуговая абсцисса, отсчитываемая от $s = 0$ в задней кромке против часовой стрелки до $s = L$ в той же точке (L – длина контура профиля.)

Предложен аналитический способ решения задачи, состоящий из двух этапов.

1. Аналитическое отображение области течения на внутренность прямоугольника с использованием алгоритмов § 3.

2. Аналитическое решение гидродинамической задачи в прямоугольнике. Распределение скорости на пластине можно найти:

$$V(\xi) = u'(\xi) \left[-\frac{1}{\pi} \int_{\xi_m}^{\xi_n} v(t) \ln' \vartheta_1(t - \xi) dt + F(\xi) \right], \quad (11.1)$$

$$F(\xi) = C_0 + C_1 \ln' \vartheta_4(\xi) + C_2 \ln'' \vartheta_4(\xi),$$

C_0, C_1, C_2 – постоянные коэффициенты, значения которых определяются в ходе численных расчетов; $(\xi_m + \pi\tau/2, \xi_n + \pi\tau/2)$ – образ проницаемого участка на верхней стороне прямоугольника; а функцию $u'(\xi)$ можно определить аналитически (§ 3).

В § 12 исследуется обтекание произвольного проницаемого профиля вблизи экрана, что эквивалентно обтеканию системы двух профилей, расположенных симметрично относительно экрана.

Поскольку для системы двух проницаемых профилей потенциал скорости и функция тока являются неоднозначными функциями, то непосредственно применить метод граничных элементов нельзя. В данной работе предлагается численный алгоритм, состоящий из трех этапов.

1. Численное конформное отображение внешности двух профилей на плоскость с двумя незамкнутыми разрезами, которое имеет гидродинамическую аналогию с циркуляционным обтеканием двух непроницаемых крыловых профилей. В данном случае используются численные процедуры, аналогичные § 9 (уравнение (9.2) дополняется условиями схода потока с задних кромок).

2. Аналитическое конформное отображение верхней полуплоскости с незамкнутым разрезом на каноническую область – внутренность прямоугольника.

3. Аналитическое решение гидродинамической задачи в указанной канонической области.

Рассмотрено два числовых примера.

1°. Циркуляционное обтекание профиля Жуковского вблизи экрана. На рис. 12.1 показана конфигурация профиля со стоками интенсивности $q = -1$ на границе, а на рис. 12.2 – с источниками интенсивности $q = 1$ (стоки обозначены символами \circ , а источники – Δ). На рис. 12.3 и 12.4 непрерывной кривой без геометрических значков показано распределение скорости, полученное для непроницаемого профиля ($q = 0$); пунктиром – для профиля, обтекаемого безграничным потоком (§ 10); сплошной кривой с геометрическими значками \circ и Δ – для проницаемого профиля вблизи экрана. Приведены отношения C_y^q/C_y^∞ и C_y^0/C_y^∞ , где C_y^q, C_y^0 – коэффициенты подъемной силы проницаемого и непроницаемого профиля вблизи экрана, C_y^∞ – коэффициент подъемной силы непроницаемого профиля в безграничном потоке. $q = 0 : C_y^0/C_y^\infty = 0.788$; $q = -1 : C_y^q/C_y^\infty = 1.062$; $q = 1 : C_y^q/C_y^\infty = 1.272$;

2°. Для сравнения результатов численных расчетов с точным решением рассмотрено циркуляционное обтекание непроницаемого тонкого профиля Жуковского вблизи экрана. Пусть H – расстояние задней кромки профиля от экрана, l – длина хорды профиля.

На рис. 12.5 и рис. 12.6 показана конфигурация тонкого профиля Жуковского. На рис. 12.7 и рис. 12.8 непрерывной кривой показано распределение скорости, полученное численно для профиля вблизи экрана; символами \circ – точное решение для пластины, обтекаемой безграничным потоком; сплошной кривой с геометрическими значками \bullet – для пластины вблизи экрана (11.1).

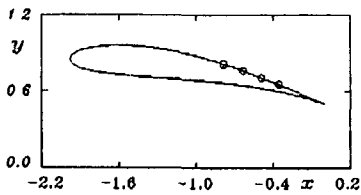


Рис. 12.1

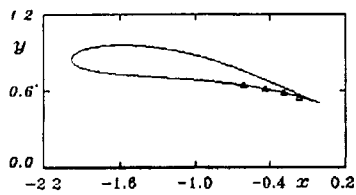


Рис. 12.2

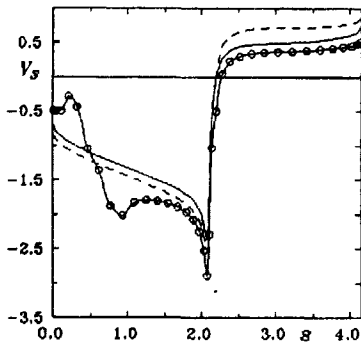


Рис. 12.3

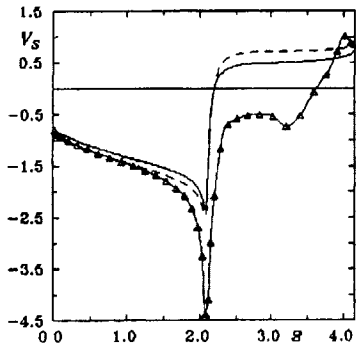


Рис. 12.4

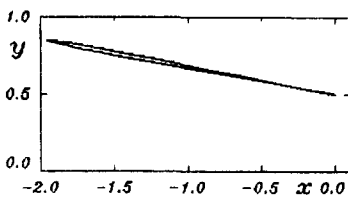


Рис. 12.5

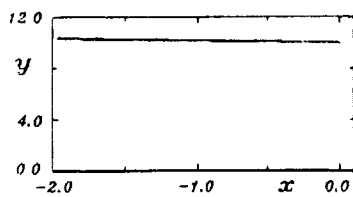


Рис. 12.6

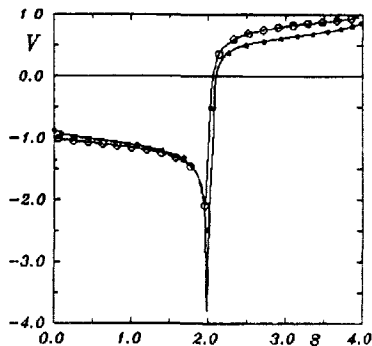


Рис. 12.7

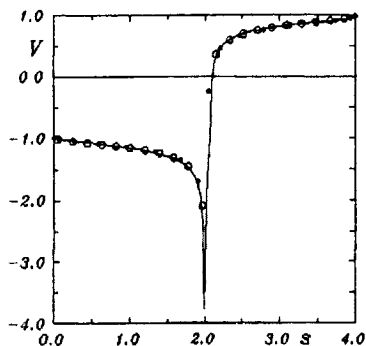


Рис. 12.8

Из рис. 12.7 следует, что экран влияет на распределение скорости на профиле при небольших отношениях H/l , что согласуется с известными

результатами ⁸.

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Разработаны алгоритмы численного конформного отображения ограниченных и неограниченных областей на неограниченные области на основе метода граничных элементов.

2. Построено численное конформное отображение внешности двух простых контуров на плоскость с двумя параллельными разрезами.

3. Численно-аналитически исследована задача обтекания крылового профиля с проницаемыми участками на границе. Найдено распределение скорости по контуру.

4. Аналитически решена задача обтекания проницаемой пластины вблизи экрана. Установлено, что экран влияет на распределение скорости на пластине лишь при небольших отстояниях пластины от экрана.

5. Численно-аналитически исследовано обтекание проницаемого крылового профиля вблизи экрана. Аналогично предыдущему случаю показано, что эффект экрана наблюдается при небольших отстояниях профиля от экрана.

Содержание диссертации отражено в следующих работах.

1. *Терентьев А.Г., Картузова Т.В., Петрова Т.Н.* Применение метода граничных элементов к численному конформному отображению и исследованию системы крыловых профилей // Актуальные проблемы математического моделирования и автоматизированного проектирования в машиностроении / Тез. докладов. Казань: Изд-во Казанск. техн. ун-та, 1995. С. 17–19.

2. *Терентьев А.Г., Петрова Т.Н.* Применение метода граничных элементов к численному конформному отображению // Изв. НАНИ ЧР. 1996. № 1. С. 56–73.

3. *Петрова Т.Н.* Численное конформное отображение внешности двух контуров на прямоугольник // Труды Всерос. научн. шк. "Гидродинамика больших скоростей". Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1996. С. 130–132.

4. *Терентьев А.Г., Смирнова Т.Н.* Применение метода граничных элементов к расчету проницаемого крылового профиля // Изв. НАНИ ЧР. 1998. № 5. С. 85–95.

5. *Смирнова Т.Н.* Численное исследование проницаемых профилей методом граничных элементов // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 3. "Краевые задачи и их приложения" / Казанское матем. общество. Материалы Всерос. научн. конференции. Казань: Унипресс, 1999. С. 358–360.

6. *Терентьев А.Г., Смирнова Т.Н.* Обтекание проницаемой пластины вблизи экрана // Изв. НАНИ ЧР. 1999. № 4. С. 83–94.

⁸Терентьев А.Г., Картузова Т.В. Численное исследование обтекания профиля вблизи экрана // Изв. НАНИ ЧР. 1996. № 6. С. 94–104.



F. 3745

A2000
3745