

На правах рукописи

Ракитянский Александр Семенович

**МАКСИМАЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫЕ СЕРИИ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ  $SL(n, R)$**

01.01.01-математический анализ

**Автореферат**

**диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

Москва - 2000 год

Работа выполнена на кафедре математического анализа  
Тамбовского государственного университета им. Г.Р.Державина

Научный руководитель  
доктор физико-математических наук, профессор В.Ф.МОЛЧАНОВ

Официальные оппоненты:  
доктор физико-математических наук, профессор Д.П.ЖЕЛОБЕНКО  
доктор физико-математических наук, профессор В.-Б.К.РОГОВ

Ведущая организация:  
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Защита состоится *16* *марта* 2000 г. в 15 час. 30 мин.  
на заседании диссертационного совета К 053.22.23 в Российском университете  
дружбы народов по адресу: Москва, ул. Орджоникидзе, 3, ауд. 485.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Российского  
университета дружбы народов по адресу:

117198 г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

Автореферат разослан *12* *февраля* 2000г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



М.В.ДРАГНЕВ

кандидат физико-математических наук, доцент

A2000

1699

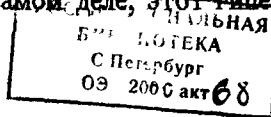
## Общая характеристика работы.

Актуальность темы исследования. Под гармоническим анализом на однородных пространствах  $G/H$  обычно понимается разложение квазирегулярного представления группы  $G$  сдвигами в пространстве  $L^2(G/H)$  по инвариантной мере. Это представление унитарно. Широкий и очень важный класс однородных пространств  $G/H$  образуют полупростые симметрические пространства. Для них решение задачи о разложении квазирегулярного представления продвинуто далеко вперед: Хариш-Чандра, И. М. Гельфанд, С. Г. Гиндикин, Ф. И. Карцелевич – для римановых симметрических пространств (60-е годы), Хариш-Чандра для полупростых групп Ли (70-е годы), В. Ф. Молчанов для пространств ранга 1 (80-е годы), Н. Бопп, П. Харанк, С. Сано – для фактор-пространств комплексных групп по их вещественным формам, П. Делорм, Э. ван ден Бан, Г. Шлихткруль – некоторые версии формулы Планшереля для общего случая (90-е годы). Однако, кроме этой (классической) задачи, в гармоническом анализе имеется еще много других, связанных с изучением представлений в пространствах функций на  $G/H$  с нелокальным скалярным произведением или даже унитарных в индефинитном смысле. В частности, такие задачи естественно появляются при построении квантования в духе Ф. А. Березина на полупростых симметрических пространствах, которые являются симплектическими многообразиями (В. Ф. Молчанов, Г. ван Дейк и их сотрудники).

Одним из примеров таких пространств (имеющих большое значение) является пространство

$$G/H = SL(n, R)/S(GL(p, R) \times GL(q, R)), \quad p + q = n. \quad (1)$$

Оно есть обобщение однополостного гиперboloида в  $R^3$ , который получается при  $n = 2, p = q = 1$ . В самом деле, этот гипероло-



ид есть  $SL(2, R)/GL(1, R)$ .

Как известно, группа  $SL(2, R)$  является ключевым примером в теории представлений. В частности, гармонический анализ на однополостном гиперboloиде важен как сам по себе, так и как источник различных общих идей.

Пространство (1) – полупростое, псевдориманово, симплектическое, оно относится к классу пара-эрмитовых симметрических пространств первой категории <sup>1 2</sup>. Оно имеет размерность  $2pq$  и ранг  $\min\{p, q\}$ .

Построение квантования на пространстве (1) и изучение тесно связанных с квантованием так называемых канонических представлений приводит к задаче о разложении тензорных произведений представлений группы  $SL(n, R)$ , относящихся к максимально вырожденным сериям, связанным с пространством (1). Это – представления группы  $SL(n, R)$ , индуцированные характерами (одномерными представлениями, не обязательно унитарными) максимальных параболических подгрупп  $P^\pm$ , для которых  $H$  является подгруппой Леви. Это – подгруппы верхних и нижних блочно треугольных матриц.

В связи с этим возникает задача об исследовании самих этих максимально вырожденных представлений  $T_{\mu, \varepsilon}^\pm$ ,  $\mu \in C$ ,  $\varepsilon = 0, 1$ .

Случай  $q = 1$  (или  $p = 1$ ) был исследован в работе Г. ван Дейка и В.Ф.Молчанова <sup>3</sup>.

Случай  $p > 1, q > 1$  оказывается значительно более трудным. Это связано с тем, что в этом случае ранг пространства  $G/H$ , а также ранг многообразия Грассмана, в функциях на котором реализуются представления, больше 1. Здесь имеется только один частный результат: в работе Д. Барбаша, С. Сахи, Б. Спех <sup>4</sup> для  $p = q$  пред-

<sup>1</sup>Kaneyuki S., Kozai M. Paracomplex structures and affine symmetric spaces. Tokyo J. Math., 1985, vol. 8, No. 1, 81–98

<sup>2</sup>Molchanov V. F. Quantization on Para-Hermitian Symmetric Spaces. Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, 1996, vol. 175, 81–85

<sup>3</sup>Dijk G. van, Molchanov V. F. Tensor products of maximal degenerate representations of the group  $SL(n; R)$ . J. Math. Pures Appl., 1999, t. 78, No. 1, 99–119

<sup>4</sup>Barbash D., Sahi S., Speh B. Degenerate series representations for  $GL(2n, R)$  and Fourier analysis. Symp. Math., 1989, vol. 31, 45–69

ложена некоторая характеристика инвариантных подпространств в случае, если имеется конечномерное неприводимое подпространство.

**Цель работы.** В предлагаемой работе мы исследуем представления  $T_{\mu, \epsilon}^{\pm}$  группы  $SL(n, R)$  для случая  $q = 2$  (мы считаем, что  $n \geq 4$ ). В этом случае ранг пространства (1) и соответствующего многообразия Грассмана равен 2, поэтому мы называем наши представления "максимально вырожденными представлениями ранга 2."

Мы находим: различные реализации представлений, их структуру (приводимость, неприводимость, композиционные ряды в приводимом случае), сплетающие операторы (как в матричном, так и интегральном виде), находим инвариантные полуторалинейные формы и, наконец, выясняем, когда наши представления или их подфакторы унитаризуемы.

**Методы исследования.** Мы используем как достаточно традиционные методы (аппарат теории представлений, ограничение на максимальную компактную подгруппу, действие некоторых операторов Ли,...), так и некоторые новые методы (барьерные функции, сферические функции,  $H$ -инварианты,...).

**Научная новизна.** В диссертации впервые:

- а) исследована структура представлений  $T_{\mu, \epsilon}^{\pm}$  группы  $SL(n, R)$ : приводимость, неприводимость, структура инвариантных подпространств;
- б) найдены все сплетающие операторы для этих серий представлений – как в матричном, так и в интегральном виде;
- в) найдены все инвариантные полуторалинейные формы, все инвариантные эрмитовы формы;
- г) найдены все унитаризуемые представления;
- д) исследован гармонический анализ на многообразиях Грассмана двумерных ориентированных подпространств в  $R^n$ ;
- е) найдены радиальные части дифференциальных операторов, яв-

ляющихся образующими в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на указанном многообразии Грассмана, вычислены собственные числа этих операторов на неприводимых подпространствах.

**Теоретическая и практическая значимость.** Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы как в математике – в гармоническом анализе на однородных пространствах и теории представлений групп Ли, так и в теоретической физике – например, при изучении квантования на однородных пространствах и вопросов, с ним связанных.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались на

- Международной конференции "Классическая и квантовая геометрия однородных пространств", Москва, 1994;
- Международной летней школе-семинаре "Гармонический анализ на однородных пространствах", Тамбов, 1996;
- Семинаре по функциональному анализу профессора В.Ф. Молчанова, ТГУ, г.Тамбов;
- Научных конференциях преподавателей и сотрудников Тамбовского государственного пединститута – университета;
- Научных конференциях преподавателей и студентов Оренбургского государственного пединститута – педуниверситета.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце реферата.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения и 15 параграфов, объединенных в две главы: в первой рассматривается случай  $n > 4$ ; во второй рассматривается случай  $n = 4$ . Список литературы, включенный в диссертацию, содержит 32 наименования. Полный объем диссертации (с оглавлением) 108 страниц.

## Содержание работы.

В первых двух параграфах (§§1, 2) мы приводим основные сведения о группе  $G = \text{SL}(n, R)$ . Здесь  $n \geq 4$ . Мы рассматриваем разбиение  $n = (n - 2) + 2$  и записываем матрицы из  $G$  в блочном виде соответственно этому разбиению. Пусть  $P^+$  и  $P^-$  — подгруппы соответственно верхних и нижних блочно треугольных матриц (это — максимальные параболические подгруппы). Мы пишем основные разложения, связанные с этими подгруппами: разложения Гаусса, "анти-Гаусса", Ивасава, "анти-Ивасава". Отсюда мы получаем меры на пространствах флагов  $G/P^\pm$  в неоднородных координатах, инвариантные относительно максимальной компактной подгруппы  $K = \text{SO}(n)$ .

Начиная с §3 и до §11 включительно мы рассматриваем общий случай  $n > 4$ .

В §3 мы сообщаем некоторые сведения о многообразии Штифеля  $S = \text{SO}(n)/\text{SO}(n - 2)$  и гармоническом анализе на нем<sup>5 6</sup>.

Пусть  $G = \text{SL}(n, R)$  действует на  $R^n$  справа:  $x \rightarrow xg$ . В соответствии с этим мы записываем вектор  $x \in R^n$  в виде строки:  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Многообразие Штифеля состоит из упорядоченных пар  $(u, v)$  ортогональных единичных векторов из  $R^n$ . Оно может быть реализовано как совокупность матриц  $s$  размеров  $2 \times n$  с условием  $ss' = E$ . На многообразии  $S$  естественным образом действуют: группа  $K$  умножениями справа:  $s \rightarrow sk, k \in K$ , и группа  $O(2)$  умножениями слева:  $s \rightarrow rs, r \in O(2)$ .

Квазирегулярное представление  $U$  группы  $K$  на  $S$  содержит не-

<sup>5</sup> Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970, 664 с.

<sup>6</sup> Strichartz R. S. The explicit Fourier decomposition of  $L^2(\text{SO}(n)/\text{SO}(n - m))$ , Canad. J. Math., 1975, vol. 27, 294-310.    »

приводимые представления  $\pi_\nu$  группы  $K$  со старшими весами

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, 0, \dots, 0), \quad (2)$$

всего  $[n/2]$  координат,  $\nu_1, \nu_2$  – целые,  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq 0$ . Представление  $\pi_\nu$  входит в разложение представления  $U$  с кратностью  $\nu_1 - \nu_2 + 1$ . Подпространства, в которых действуют  $\pi_\nu$ , состоят из гладких функций (из ограничений на  $S$  многочленов от матричных элементов матриц  $s$ ).

В §§4, 5, 6, 7 мы исследуем гармонический анализ на многообразии Грассмана  $\Gamma = SO(n)/SO \times SO(n-2)$  двумерных ориентированных подпространств в  $R^n$ . Здесь мы опирались на работы<sup>7 8 9</sup>.

Для плоскости  $\gamma \in \Gamma$  мы обозначаем через  $-\gamma$  ту же плоскость с противоположной ориентацией. Пусть  $d\gamma$  – мера на  $\Gamma$ , инвариантная относительно  $K$ , ее выражение в неоднородных координатах было найдено в §2.

Сопоставим точке  $s = (u, v) \in S$  плоскость  $\sigma \in \Gamma$ , порождаемую векторами  $u, v$ . Мы получим проекцию  $S \rightarrow \Gamma$ . Функции на  $\Gamma$  мы можем рассматривать как функции  $\varphi$  на  $S$ , инвариантные относительно умножения слева на элементы из  $SO(2)$ :

$$\varphi(\tau s) = \varphi(s),$$

где  $\tau \in SO(2)$ .

Пусть  $\pi$  – квазирегулярное представление группы  $K$  на  $\Gamma$ . Неприводимые компоненты его – такие же, как у его ограничения – обозначим его снова  $\pi$  – на пространство  $\mathcal{D}(\Gamma) = C^\infty(\Gamma)$ . Оно распадается в прямую сумму представлений  $\pi^{(\varepsilon)}$ ,  $\varepsilon = 0, 1$ , действующих в подпространствах  $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$ , состоящих из функций  $\varphi$  четности  $\varepsilon$ :

<sup>7</sup> Helgason S. Differential geometry and symmetric spaces. New-York-London: Acad. Press, 1962, 486 p. (Пер. на рус. яз.: Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.: Мир, 1964, 533 с.)

<sup>8</sup> Helgason S. Groups and geometric analysis. New York, etc.: Acad. Press, 1984. (Пер. на рус. яз.: Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987, 735 с.)

<sup>9</sup> Молчапов В. Ф. Гармонический анализ на однородных пространствах. Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. / ВИНТИ, том 59, 1990, 5–144



$$\varphi(-\gamma) = (-1)^\epsilon \varphi(\gamma).$$

Для удобства отождествим старшие веса (2) с векторами  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  на плоскости и будем называть последние тоже старшими весами.

Обозначим через  $N_{\epsilon, \epsilon} = 0, 1$ , множество векторов  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  с целочисленными координатами, для которых  $\nu_1 \geq \nu_2 \geq 0$  и  $\nu_1 \equiv \nu_2 \equiv \epsilon$  (здесь и дальше знак сравнения обозначает сравнение по модулю 2).

В разложение представления  $\pi^{(\epsilon)}$  входят с кратностью 1 неприводимые представления  $\pi_\nu$ , для которых  $\nu \in N_{\epsilon, \epsilon}$ .

Мы даем явное описание неприводимых подпространств  $H_\nu \subset \mathcal{D}_\epsilon(\Gamma)$ , в которых действуют  $\pi_\nu$ .

Сферические функции  $\Phi_\nu$  из  $H_\nu$  выражаются через многочлены Коорнвиндера<sup>10</sup>.

Это — многочлены от двух переменных, ортогональные относительно некоторой меры в некоторой области на плоскости. Коорнвиндер ввел их, в частности, для изучения гармонического анализа на многообразии Грассмана  $\Gamma_0$  неориентированных двумерных плоскостей в  $R^n$ . В §6 мы приводим описание этих многочленов. В §5 мы исследуем образующие  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на многообразии  $\Gamma$ . Эти операторы — второго и четвертого порядков, первый из них оператор Лалласа-Бельтрами. Мы находим явно радиальные части этих операторов, которые не приводим здесь ввиду их громоздкости.

Подпространства  $H_\nu$  являются собственными для  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  с собственными числами  $\lambda_1(\nu)$  и  $\lambda_2(\nu)$  соответственно:

$$\lambda_1(\nu) = \nu_1(2 - n - \nu_1) + (4 - n - \nu_2),$$

$$\lambda_2(\nu) = (\nu_1 + 1)(\nu_1 + n - 3)\nu_2(\nu_2 + n - 4).$$

<sup>10</sup> Koornwinder T., Harmonics and spherical functions on Grassmann manifolds of rank two and two-variable analogues of Jacobi polynomials. Lect. Notes Math., 1977, vol. 171, 141–154

В §8 мы определяем серии представлений

$$T_{\mu,\varepsilon}^{\pm} = \text{Ind}(G, P^{\mp}, \omega_{\mp\mu,\varepsilon}),$$

где  $\mu \in C, \varepsilon = 0, 1$ , группы  $G$ , индуцированных характерами (одномерными представлениями, не обязательно унитарными) максимальных параболических подгрупп  $P^{\pm}$ , — максимально вырожденные серии "ранга 2". Характер  $\omega_{\mu,\varepsilon}$  группы  $P^{\pm}$  определяется формулой:

$$\omega_{\mu,\varepsilon}(p) = (\det c)^{\mu\varepsilon},$$

где  $c$  — правый нижний  $2 \times 2$ -блок матрицы  $p \in P^{\pm}$ . Мы используем следующее обозначение для характера группы  $R^*$ :  $t^{\mu,\varepsilon} = |t|^{\mu} \text{sgn}^{\varepsilon} t$ . Мы рассматриваем реализации представлений  $T_{\mu,\varepsilon}^{\pm}$  в компактной и некомпактной картинах.

В изучении представлений  $T_{\mu,\varepsilon}^{\pm}$  (§§9-11) мы следуем в основном схеме работ <sup>11 12</sup>.

В §9 мы исследуем структуру представлений  $T_{\mu,\varepsilon}^{\pm}$  — с помощью ограничения на максимально компактную подгруппу  $K$ .

Центральное место здесь занимает теорема 9.6, которая дает в явном виде "коэффициенты зацепления  $K$ -типов". А именно, пусть  $Z_0$  — диагональная матрица с диагональю  $\frac{2}{n}, \dots, \frac{2}{n}, \frac{2}{n} - 1, \frac{2}{n} - 1$ . Это — элемент из алгебры Ли группы  $G$ , являющийся базисным в централизаторе группы  $L = K \cap P^{\pm}$ . В представлении  $T_{\mu,\varepsilon}^{\pm}$  ему отвечает оператор  $\mp 2\mathcal{L}_{\mu}$ , где  $\mathcal{L}_{\mu}$  — некоторый дифференциальный оператор первого порядка от двух переменных (от аргументов сферических функций).

Теорема 9.6 утверждает, что оператор  $\mathcal{L}_{\mu}$  переводит сферическую функцию  $\Phi_{\nu}$  в линейную комбинацию ее самой и четырех "соседних"

<sup>11</sup> Молчанов В. Ф. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Мат. сб., 1970, том 81, No. 3, 358-375

<sup>12</sup> Молчанов В. Ф. Представления псевдоунитарной группы, связанные с конусом. Функцион. анализ: Межвуз. сб., Ульяновск, 1984, Вып. 22, 55-66

сферических функций:

$$\mathcal{L}_\mu \Phi_\nu = (2\mu + n) \gamma_0(\nu) \Phi. + \sum_{i=1}^4 \gamma_i(\nu) \beta_i(\mu; \nu) \Phi. + 2e_i,$$

где  $e_i$  – следующие четыре вектора на плоскости:

$$e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), e_3 = (0, -1), e_4 = (-1, 0),$$

$\gamma_i$  – некоторые коэффициенты, а  $\beta_i$  – ”барьерные” функции: пусть  $\nu = (p, q)$ , тогда

$$\begin{aligned} \beta_1(\mu; \nu) &= \mu - p, \\ \beta_2(\mu; \nu) &= \mu + 1 - q, \\ \beta_3(\mu; \nu) &= \mu + n - 3 + q, \\ \beta_4(\mu; \nu) &= \mu + n - 2 + p. \end{aligned}$$

Назовем прямую  $\beta_i(\mu, \nu) = 0$  на плоскости векторов  $\nu = (p, q)$  барьером для представления  $T_{\mu, \epsilon}^\pm$ , если эта прямая пересекается с  $N_\epsilon$  и пересечение  $N_\epsilon \cap \{\beta_i(\mu, \nu) \geq 0\}$  отлично от  $N_\epsilon$ . Для того чтобы прямая  $\beta_i = 0$  была барьером, необходимо, чтобы  $\mu$  было целым. Для данного представления  $T_{\mu, \epsilon}^\pm$  количество барьеров не превосходит 1.

Обозначим  $\mu^* = -\mu - n$ . Прямая  $\beta_i = 0$  является барьером для  $T_{\mu, \epsilon}^\pm$  для следующих целых  $\mu$  и  $\epsilon = 0, 1$ :

$$\begin{aligned} i = 1 : \mu &\geq \epsilon, \mu \equiv \epsilon, \\ i = 2 : \mu &\geq \epsilon - 1, \mu \equiv \epsilon - 1, \\ i = 3 : \mu &\leq 1 - n - \epsilon, \mu \equiv 1 - n - \epsilon, \text{ т.е. } \mu^* \geq \epsilon - 1, \mu^* \equiv \epsilon - 1, \\ i = 4 : \mu &\leq -n - \epsilon, \mu \equiv -n - \epsilon, \text{ т.е. } \mu^* \geq \epsilon, \mu^* \equiv \epsilon. \end{aligned}$$

Если  $\beta_i = 0$  является барьером для  $T_{\mu, \epsilon}^\pm$ , то обозначим через  $V_i(\mu, \epsilon)$  подпространство в  $D_\epsilon(\Gamma)$ , которое есть сумма подпространств  $H_\mu$  таких, что  $\mu$  находится внутри этого барьера (т.е.  $\beta_i(\mu, \nu) \geq 0$ ).

**Теорема 9.11.** *Подпространства  $V_i(\mu, \epsilon)$  инвариантны относительно представления  $T_{\mu, \epsilon}^\pm$ . Всякое собственное инвариантное подпространство есть одно из  $V_i(\mu, \epsilon)$ . Представление  $T_{\mu, \epsilon}^\pm$  непри-*

видно, за исключением случаев, когда  $\mu$  — целое и выполняется одно из неравенств  $\mu \geq \varepsilon - 1$  или  $\mu^* \geq \varepsilon - 1$ . В этих случаях имеется в точности одно собственное инвариантное подпространство — это  $V_i(\mu, \varepsilon)$ .

В §10 мы описываем все сплетающие операторы между представлениями серий  $T_{\mu, \varepsilon}^{\pm}$ , т.е. непрерывные операторы  $A$  в пространстве  $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$ , удовлетворяющие условию:

$$T_{\mu_1, \varepsilon_1}^{\pm}(g)A = AT_{\mu, \varepsilon}^{\pm}(g) \quad (3)$$

для всех  $g \in G$  (здесь знаки  $\pm$  берутся в произвольных сочетаниях), а также сплетающие операторы между подфакторами представлений этих серий в приводимом случае.

**Теорема 10.1.** *Ненулевой оператор  $A : \mathcal{D}_\varepsilon(l') \rightarrow \mathcal{D}_\chi(\Gamma)$ , сплетающий представления  $T_{\mu, \varepsilon}^{\pm}$  и  $T_{\lambda, \chi}^{\pm}$ , существует лишь для следующих пар представлений:  $(T_{\mu, \varepsilon}^{\pm}, T_{\mu, \varepsilon}^{\pm})$ ,  $(T_{\mu, \varepsilon}^{\pm}, T_{\mu^*, \varepsilon}^{\mp})$ ,  $\mu^*$  см. выше. Для первой пары всякий такой оператор кратен единичному. Для второй пары сплетающий оператор — единственный с точностью до множителя. В приводимом случае этот оператор обращается в нуль на инвариантном подпространстве, а образ его есть инвариантное подпространство для  $T_{\mu^*, \varepsilon}^{\mp}$ . Кроме того, в приводимом случае существует оператор (единственный с точностью до множителя), который сплетает ограничение представления  $T_{\mu, \varepsilon}^{\pm}$  на инвариантное подпространство и фактор — представление представления  $T_{\mu^*, \varepsilon}^{\mp}$  в фактор — пространстве по инвариантному подпространству.*

Мы даем явные формулы для собственных чисел  $a(\nu)$  сплетающего оператора на подпространствах  $H_\nu$ , именно, если  $A$  определен на

всем  $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$ , то:

$$a(\nu) = \text{const} \cdot \prod_{j=1}^4 \Gamma\left(-\frac{1}{2}\beta_j(\mu; \nu)\right)^{-1},$$

а если  $A$  определен на внутренности  $r$ -ого барьера (т.е.  $\text{Re } \beta \geq 0$ ), то:

$$a(\nu) = \text{const} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\beta_r(\mu; \nu)\right) \cdot \prod_{j \neq r} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\beta_j(\mu; \nu)\right)^{-1}$$

Предъявим сплетающие операторы в интегральном виде. Пусть  $[\sigma, \tau]$ - функция на  $\Gamma \times \Gamma$  ("угол" между плоскостями  $\sigma, \tau$ ), определяемая следующим образом: пусть  $s, t$  - точки из многообразия Штифеля  $S$ , порождающие  $\sigma, \tau$  соответственно, тогда  $[\sigma, \tau] = \det(st')$  (штрих означает транспонирование).

Определим оператор  $A_{\mu, \varepsilon}$  на  $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$  формулой:

$$(A_{\mu, \varepsilon} \varphi)(\gamma) = \int_{\Gamma} [\gamma, \sigma]^{\mu^*, \varepsilon} \varphi(\sigma) d\sigma.$$

**Теорема 10.4.** Оператор  $A_{\mu, \varepsilon}$  на  $\mathcal{D}_\varepsilon(\Gamma)$  для всех комплексных  $\mu$ , за исключением тех  $\mu$ , где он имеет полюс, является непрерывным и сплетает представления  $T_{\mu, \varepsilon}^\pm$  с  $T_{\mu^*, \varepsilon}^\mp$ :

$$T_{\mu^*, \varepsilon}^\mp(g) A_{\mu, \varepsilon} = A_{\mu, \varepsilon} T_{\mu, \varepsilon}^\pm(g)$$

(берутся либо верхние знаки  $\pm$ , либо нижние).

На каждом  $H_\nu, \nu \in N_\varepsilon$ , оператор  $A_{\mu, \varepsilon}$  есть скалярный оператор, т.е. умножение на некоторое число  $a(\mu, \varepsilon, \nu)$  (от " $\pm$ " оно не зависит). Вот явное выражение:

$$a(\mu, \varepsilon; \nu) = 2^{2\mu+2n-2} \pi^{n-1} \frac{\Gamma(-\mu-n+1)\Gamma(-\mu-n+2)}{\prod_{j=1}^4 \Gamma\left(-\frac{1}{2}\beta_j(\mu; \nu)\right)},$$

где  $\Gamma$ - гамма-функция Эйлера.

Как функция от  $\mu$  оператор  $A_{\mu,\varepsilon}$  является мероморфной функцией - такой, что оператор

$$\tilde{A}_{\mu,\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(-\mu - n + 1 + \varepsilon)} A_{\mu,\varepsilon}$$

является целой функцией, нигде не обращающейся в нуль. В противном случае оператор

$$A'_{\mu,\varepsilon} = \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{\tilde{A}_{\lambda,\varepsilon}}{\lambda - \mu}$$

определен на  $V_i(\mu, \varepsilon)$ , сплетает ограничение на  $V_i(\mu, \varepsilon)$  представления  $T_{\mu,\varepsilon}^{\pm}$  и фактор-представления  $T_{\mu^*,\varepsilon}^{\mp}$  на дуальном подфакторе.

В §11 мы находим инвариантные полуторалинейные формы, инвариантные эрмитовы формы и выясняем, какие из представлений унитаризуемы. При  $n > 4$  имеется только непрерывная серия неприводимых унитарных представлений: это - представления  $T_{\mu,\varepsilon}^{\pm}$  с  $\text{Re } \mu = -\frac{n}{2}$ , действующие в  $L^2_{\varepsilon}(\Gamma)$  (пространство четных ( $\varepsilon = 0$ ), или нечетных ( $\varepsilon = 1$ ) функций из  $L^2(\Gamma)$ ).

В главе II мы рассматриваем случай  $n = 4$ . Этот случай имеет ряд особенностей, отличающих его от  $n > 4$ : подгруппы  $P^+$  и  $P^-$  сопряжены, подпространства  $q^{\pm}$  (изотропные подпространства в алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  группы  $G$ ) обладают  $H$ -инвариантной мерой, йордановы тройные системы с пространствами  $q^{\pm}$  являются йордановыми алгебрами, представления обладают  $H$ -инвариантами, набор унитаризуемых представлений намного богаче, чем для  $n > 4$ : кроме непрерывной серии имеются две дискретные, дополнительная серия и одно исключительное представление.

Исследованию случая  $n = 4$  помогает то обстоятельство, что группа  $SL(4, \mathbb{R})$  локально изоморфна группе  $SO_0(3, 3)$  покрывает ее с кратностью два. Поскольку ядро этого гомоморфизма совпадает с ядрами всех представлений  $T_{\mu,\varepsilon}^{\pm}$ , мы получаем представления группы  $SO_0(3, 3)$ . Эти последние оказываются представлениями группы  $SO_0(3, 3)$ , связанными с конусом. Представления группы  $SO_0(p, q)$ ,

связанные с конусом, были описаны В. Ф. Молчановым<sup>13</sup>. Поэтому мы можем использовать эти результаты в частном случае  $SO_0(3, 3)$ .

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.Ф. Молчанову за постановку задачи, большую помощь и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Ракитянский А.С. О некоторых представлениях группы  $SL(4; R)$ . // Материалы научн. конф., изд-во ТГПИ, – Тамбов, – 1994, – С. 6–7.
2. Ракитянский А.С. К вопросу о представлениях группы  $SL(n; R)$ . // Материалы научн. конф., изд-во ОГПИ, – Оренбург, – 1995, – С. 28–29.
3. Ракитянский А.С. Максимально вырожденная серия представлений группы  $SL(n; R)$  ранга 2. // III Державинские чтения: Материалы научн. конф., изд-во ТГУ, – Тамбов, – 1998, – С. 14–15.
4. Ракитянский А.С. Сплетающие операторы для максимально вырожденных серий группы  $SL(n; R)$  ранга 2. // IV Державинские чтения: Материалы научн. конф., изд-во ТГУ, – Тамбов, – 1999, – С. 31–32.
5. Ракитянский А.С. Гармонический анализ на многообразиях Грассмана. // Материалы научн. конф., изд-во ОГПУ, – Оренбург, – 1999, – С. 16–19.
6. Rakityansky A.S. Maximal degenerate series for  $SL(n, R)$  of rank two. Вестник Тамбовского Университета, 1998, том 3, вып. 1, 90–95.

---

<sup>13</sup>Молчанов В. Ф. Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом. Мат. сб., 1970, том 81, No. 3, 358–375

## Ракитянский Александр Семенович

### Максимально вырожденные серии представлений группы $SL(n, R)$ .

В диссертации исследуются максимально вырожденные неунитарные серии представлений группы  $SL(n, R)$ , отвечающие разбиению  $n = (n - 2) + 2$ , т. е. представлений, индуцированных характерами (одномерными представлениями, не обязательно унитарными) максимальных параболических подгрупп, отвечающих указанному разбиению. Найдены различные реализации этих представлений, их структура (приводимость, неприводимость, инвариантные подпространства, композиционные ряды), все сплетающие операторы, инвариантные полуторалинейные формы, инвариантные эрмитовы формы, унитаризуемые представления. Для изучения этих вопросов был развит гармонический анализ на многообразии Грассмана двумерных ориентированных подпространств в  $R^n$ . В частности, вычислены сферические функции, найдены радиальные части дифференциальных операторов, являющихся образующими в алгебре инвариантных дифференциальных операторов на этом многообразии, вычислены собственные числа этих операторов на неприводимых подпространствах.

## Rakityansky Aleksandr Semenovich

### Maximal degenerate series representations of the group $SL(n, R)$

In the dissertation we investigate maximal degenerate series representations of the group  $SL(n, R)$  associated with the partition  $n = (n - 2) + 2$ , i.e. representations induced by characters (one-dimensional representations not necessarily unitary) of maximal parabolic subgroups corresponding to the partition mentioned above. We find out some realizations of these representations, determine their structure (reducibility, irreducibility, invariant subspaces, composition series), intertwining operators, invariant sesquilinear forms, invariant Hermitian forms, unitarizable representations. To study these problems, we develop harmonic analysis on the Grassmannian manifold of two-dimensional oriented subspaces in  $R^n$ . In particular, we compute generators in the algebra of invariant differential operators on this manifold, compute eigenvalues of these operators on irreducible subspaces.

AK



Ракитянский А С Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

---

Подписано к печати 28.01 2000

Объем 1 п.л.

Тираж 100 экз.

Заказ 61

---

Издательско-полиграфический центр  
Оренбургского государственного педагогического университета  
им. В.П.Чкалова  
460000, г Оренбург, ул. Гагарина, 1

Из фондов Российской национальной библиотеки

Из фондов Российской национальной библиотеки

Б. 1699

А 2000  
1699

Из фондов Российской национальной библиотеки