МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.986.22

ПОЛЯКОВ МАКСИМ ЕВГЕНЬЕВИЧ

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГИЛЬБЕРТОВЫХ И БЛИЗКИХ К НИМ МОДУЛЕЙ НАД C^*-АЛГЕБРАМИ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва — 2001

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А. Я. Хелемский

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Е. А. Горин
доктор физико-математических наук,
профессор Е. В. Троицкий

Ведущая организация:
Казанский государственный университет

Защита диссертации состоится "2" ноября 2001 г. в 16 часов 15 минут на заседании диссертационного совета Д.053.05.04 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу. 119899. Москва, ГСП, Воробьевы Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико- математического факультета МГУ (Главное Здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "2" октября 2001 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д.053.05.04 при МГУ,
профессор Т. П. Лукашенко

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория C^*-алгебр в настоящее время является важной частью функционального анализа. Это объясняется как содержательной стороной самой теории, так и широтой и многообразием ее приложений к проблемам некоммутативной геометрии, квантовой теории поля и т. д. Многие из важнейших объектов анализа — такие как пространство всех непрерывных функций на компакте, снабженное операцией поточечного умножения, или же пространство всех линейных непрерывных операторов на гильбертовом пространстве, снабженное естественной композицией операторов, оказываются C^*-алгебрами. Одним из направлений в исследовании C^*-алгебр и более общих банаховых алгебр является изучение их гомологических свойств, аналогичное соответствующей гомологической теории "чистых" алгебр, созданной Г. Хохшильдом[1,2,3], С. Эйленбергом[4], С. Маклейном[5] и другими учеными. Гомологическая теория банаховых алгебр была подробно разработана Б. Джонсоном[6,7], А. Я. Хелемским[8] и другими исследователями.

Важнейшими понятиями гомологической теории банаховых алгебр являются определения *проективного*, *инъективного* и *плоского* модулей. Одно из основных направлений исследований — это изучение необходимых и достаточных условий проективности, инъективности и плоскости. На этом пути обнаружены разнообразные связи между гомологическими и негомологическими свойствами банаховых модулей. В гомологических терминах можно описать такие важные понятия современной алгебры, топологии и функционального анализа, как *аменабельность*, *паракомпактность* и т. д.

[1] Hochschild G. On the cohomology groups of an associative algebra. Ann. of Math. v. 46. 1945. 58–67

[2] Hochschild G. Cohomology and representations of associative algebras. Duke Math. J. 1947. 14. 921–948

[3] Hochschild G. Relative homological algebra. Trans. Amer. Math. Soc. 1956. v. 82. 246–249

[4] Eilenberg S., MacLane S. Group exstensions and homology. Ann. of Math. 1942. v. 43. 757–831

[5] Маклейн С. Гомология, М.: Мир. 1966

[6] Johnson B. E. Continuity of derivations on commutative Banach algebras. Amer. J. Math. 1969. v. 91, p. 1–10

[7] Johnson B. E. The Wedderburn decomposition of Banach algebras with finite dimensional radical. Amer. J. Math. 1968. v. 90, p. 866–876

[8] Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: Изд-во МГУ. 1986

Основные понятия гомологической теории операторных алгебр — это пространственные проективность, инъективность и плоскость этих алгебр. Наиболее глубокие результаты были получены при изучении пространственной проективности самосопряженных алгебр, где Хелемский сформулировал полный критерий для этого свойства в негомологических терминах[9]. Одной из основных тем диссертации является дальнейшее развитие данной тематики, позволяющее обобщить результаты Хелемского также и на некоторые классы несамосопряженных операторных алгебр.

Значительно хуже поддаются исследованию тесно связанные проблемы пространственной инъективности и плоскости, совпадающие в самосопряженном случае. Если для несамосопряженного случая Ю. О. Головин предложил примеры[10] пространственно неинъективных и неплоских алгебр, то для самосопряженного случая соответствующая проблема (включенная А. Я. Хелемским в список задач[11]) оставалось открытой до последнего времени. В данной диссертации построен пример пространственно неинъективной и неплоской алгебры фон Ноймана $W_r^*(\mathbf{F}_2)$, которая порождена свободной группой $\mathbf{F}_2$ с двумя образующими — простейшим примером неаменабельной группы[12]. При этом причины неаменабельности и неинъективности оказываются близки. Известно также, что из аменабельности группы G следует пространственная инъективность и плоскость алгебры $W_r^*(G)$. Естественное предположение об эквивалентности этих свойств в настоящее время не доказано и не опровергнуто.

Кроме того, в диссертации определена гомологическая размерность левого $C(\Omega)$-модуля $L^1(\Omega)$, рассмотренного относительно операции поточечного умножения функций (здесь Ω — метризуемый компакт, снабженный борелевской мерой). Аналогичные рассуждения позволяют также получить новое доказательство для критерия проективности произвольного сепарабельного унитального гильбертового $C(\Omega)$-модуля (оно является частным случаем общего критерия проективности произвольного гильбертового модуля над C^*-алгеброй, доказанного Хелемским на основании иного подхода).

---

[9] Helemskii A. Ya. Description of spatially projective operator C^*-algebras and around it. Banach Algebras '97. Proceeding of the 13th International Conference on Banach Algebras. Walter de Gruyter. Berlin, New York. 1998

[10] Головин Ю. О. Пространственная плоскость и инъективность неразложимых CSL-алгебр. Мат. заметки 63:1 (1998). 9–20

[11] Helemskii A. Ya. 31 problems of the homology of the algebras of analysis. Linear and complex analysis problem book 3. Part I (V. P. Havin, N. K. Nikolski eds. Lecture Notes in Math. 1573. Springer-Verlag. Berlin. 1994) 54–78

[12] Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах. М. Мир. 1973

Методы исследования

При исследовании используются различные методы гомологической теории банаховых алгебр, теории аменабельных групп, функционального и гармонического анализа.

Цель работы

Исследовать гомологические свойства (пространственную проективность, инъективность, плоскость, гомологические размерности) для различных классов банаховых модулей над C*-алгебрами.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1) Описан пример пространственно неинъективной и неплоской алгебры фон Ноймана.

2) Установлен критерий пространственной проективности для несамосопряженных операторных алгебр, обладающих каноническим представлением (в частности, этим представлением обладают все самосопряженные операторные алгебры).

3) Установлен критерий проективности для широкого класса банаховых модулей над алгеброй $C(\Omega)$, где Ω — метризуемый компакт с борелевской мерой (этот класс содержит все сепарабельные унитальные гильбертовы модули, а также модуль $L^1(\Omega)$). Кроме того, для модуля $L^1(\Omega)$ определены его гомологические размерности

Теоретическая и практическая значимость

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах гомологической теории банаховых алгебр, теории операторных алгебр, теории аменабельных групп.

Апробация работы

Результаты работы обсуждались на научно-исследовательских семинарах "Алгебры в анализе" под руководством профессора А. Я. Хелемского, на семинаре "Функциональные методы в топологии" под руководством профессоров Ю. П. Соловьева и А. С. Мищенко и на XXII конференции молодых ученых МГУ.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, и пяти основных глав, разбитых на параграфы. Текст диссертации изложен на 74 печатных листах. Список литературы содержит 39 наименований.

Содержание работы

Глава 1. В первой главе содержится перечень необходимых определений и обозначений. Приведем некоторые из них, которые играют ключевую роль в дальнейшем изложении. Мы будем называть левый A-модуль X *проективным*, если морфизм

$$\pi_X : A_+ \widehat{\otimes} X \to X, \pi_X(a \otimes x) = a \cdot x, a \in A_+, x \in X,$$

называемый *канонической проекцией* для X, есть ретракция (другими словами, имеет правый обратный морфизм). Левый A-модуль X будем называть *инъективным*, если морфизм

$$\breve{\pi}_X : X \to \mathcal{B}(A_+, X), (\breve{\pi}_X[x])(a) = a \cdot x, a \in A_+, x \in X,$$

называемый *каноническим вложением* для X, есть коретракция (другими словами, имеет левый обратный морфизм). Для категории унитальных модулей в определениях канонической проекции и канонического вложения можно заменить алгебру A_+ на алгебру A.

Для левого модуля X *проективной резольвентой* над X называется допустимый комплекс проективных модулей

$$0 \leftarrow X \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow \dots$$

Длиной резольвенты называется наименьшее число n такое, что $P_k = 0$ для всех $k > n$. Если такого числа нет, то длина считается равной бесконечности. Длина самой короткой проективной резольвенты над X называется *проективной гомологической размерностью модуля* X.

Для случая произвольной равномерно замкнутой операторной алгебры $A \subset \mathcal{B}(H)$ (в частности, C^*-алгебры) в некотором гильбертовом пространстве H, наиболее естественным примером левого A-модуля является само пространство H, рассмотренное с умножением $a \cdot h = a(h), a \in$

$A, h \in H$. Напомним, что алгебру A принято называть *пространственно проективной* (соответственно, *инъективной, плоской*), если соответствующим свойством (проективностью, инъективностью плоскостью) обладает модуль H.

Глава 2. Вторая глава содержит основной результат диссертации — пример пространственно неинъективной и пространственно неплоской алгебры фон Ноймана.

Указанным примером является алгебра фон Ноймана, порожденная свободной группой $\mathbf{F}_2$ с двумя образующими a и b. Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(\mathbf{F}_2)$, ортонормированным базисом которого является множество индикаторов δ_s элементов s группы $\mathbf{F}_2$. Каждому элементу $p \in \mathbf{F}_2$ можно сопоставить оператор левого сдвига $T_p : l^2(\mathbf{F}_2) \to l^2(\mathbf{F}_2) : \delta_s \mapsto \delta_{ps}$. Ясно, что $T_p \in \mathcal{B}(l^2(\mathbf{F}_2))$. Рассмотрим минимальную алгебру фон Ноймана $A = W^*_l(\mathbf{F}_2) \subset \mathcal{B}(l^2(\mathbf{F}_2))$, порожденную этим семейством операторов.

Теорема 1 *Алгебра фон Ноймана $A = W^*_l(\mathbf{F}_2)$ не является пространственно плоской и пространственно инъективной.*

Кратко изложим основную идею этого доказательства. Достаточно показать, что всякий морфизм левых A-модулей $Z : \mathcal{B}(A, l^2(\mathbf{F}_2)) \to l^2(\mathbf{F}_2)$ переводит отображение $\check{\pi}[\delta_e]$ в ноль (здесь δ_e — индикатор единицы $e \in \mathbf{F}_2$, $\check{\pi} : l^2(\mathbf{F}_2) \to \mathcal{B}(A, l^2(\mathbf{F}_2))$ — каноническое вложение). В этом случае очевидно, что каноническое вложение $\check{\pi}$ не обладает левым обратным морфизмом A-модулей.

Пусть для некоторого отображения $S \in \mathcal{B}(A, l^2(\mathbf{F}_2))$ норма элемента $(\sum_{j=1}^n T_{a^{k_j}}) \cdot S$ при подходящем выборе чисел $k_j, j = 1, \ldots, n$ растет медленнее, чем $\sqrt{n}$ (такие отображения S мы будем называть *отображениями медленного роста*). Рассмотрим произвольный морфизм $Z : \mathcal{B}(A, l^2(\mathbf{F}_2)) \to l^2(\mathbf{F}_2)$. Тогда $\|(\sum_{j=1}^n T_{a^{k_j}}) \cdot Z(S)\| \leq \|Z\| \|(\sum_{j=1}^n T_{a^{k_j}}) \cdot S\|$. Однако при подходящем выборе чисел k_j левая часть неравенства растет как $\|Z(S)\|\sqrt{n}$, то есть быстрее, чем правая часть. Поэтому $Z(S) = 0$. Этот метод позволяет установить, что всякое отображение медленного роста лежит в ядре любого морфизма $Z : \mathcal{B}(A, l^2(\mathbf{F}_2)) \to l^2(\mathbf{F}_2)$.

Однако отображение $\check{\pi}[\delta_e]$ не является отображением медленного роста. Но при помощи некоторых алгебраических выкладок его можно выразить через такие отображения. Более точно, обозначим символом A_0 множество слов свободной группы $\mathbf{F}_2$ с двумя образующими a и b, несократимая запись которых заканчивается на b в ненулевой степени (в этот класс включим и единицу $e \in \mathbf{F}_2$). Введем оператор $P_{A_0} : l^2(\mathbf{F}_2) \to l^2(\mathbf{F}_2)$, проектирующий пространство $l^2(\mathbf{F}_2)$ на подпространство $l^2(A_0) \subset l^2(\mathbf{F}_2)$.

Далее, рассмотрим композицию $P_{A_0} \circ \breve{\pi}[\delta_e] \in \mathcal{B}(A, l^2(\mathbf{F}_2))$ операторов $\breve{\pi}[\delta_e] : A \to l^2(\mathbf{F}_2)$ и $P_{A_0} : l^2(\mathbf{F}_2) \to l^2(\mathbf{F}_2)$. Оказывается, что если отображение $P_{A_0} \circ \breve{\pi}[\delta_e]$ является отображением медленного роста, то отображение $\breve{\pi}[\delta_e]$ переводится любым морфизмом $Z : \mathcal{B}(A, l^2(\mathbf{F}_2)) \to l^2(\mathbf{F}_2)$ в ноль. Эти доказательство приведено в первом параграфе главы.

Итак, необходимо показать, что при подходящем выборе чисел $k_j, j = 1, \dots, n$ норма отображения $(\sum_{j=1}^n T_{a^{k_j}}) \cdot (P_{A_0} \circ \breve{\pi}[\delta_e])$ растет медленнее, чем $\sqrt{n}$. Во втором параграфе показано, что эта норма не превосходит величины $\int\limits_{\mathbf{T}} |\sum_{j=1}^n z^{k_j}|\, dz$, где $\mathbf{T}$ — единичная окружность $\{z : |z| = 1\}$ комплексной плоскости с естественной лебеговой мерой (длиной дуги, деленной на 2π). Поэтому нужное нам утверждение сводится к изучению некоторых асимптотических свойств интегралов по комплексной окружности $\mathbf{T}$, которое является основным содержанием третьего параграфа главы.

Глава 3. В третьей главе работы изложен критерий *пространственной проективности для одного класса несамосопряженных операторных алгебр.* Это условие является естественным обобщением доказанного А. Я. Хелемским критерия пространственной проективности C^*-алгебр[13], который мы сформулируем ниже. Далее символами $\dot{\otimes}$ и $\oplus$ будут обозначаться, соответственно, гильбертово тензорное произведение и ортогональная l^2-сумма гильбертовых пространств. Символом $\widehat{\otimes}$ будет обозначаться проективное тензорное произведение банаховых пространств. Напомним, что левый модуль H над C^*-алгеброй A называется *гильбертовым*, если он является гильбертовым пространством и для любых $x, y \in H, a \in A$ выполнено условие $\langle a \cdot x, y\rangle = \langle x, a^* \cdot y\rangle$. Проекторы $p, q \in A$ называются *эквивалентными по Мюррею–фон Нойманну*, если существует такой элемент $u \in A$, что $p = u^*u$ и $q = uu^*$. Проектор $q \in A$ называется *элементарным*, если подалгебра qAq одномерна. В этом случае можно рассмотреть левый A-модуль $H_q = Aq$, который является гильбертовым относительно скалярного произведения, корректно определенного формулой $\langle aq, bq\rangle q = qb^*aq$. Для любого гильбертова пространства K_q введем левый гильбертов модуль $H_q \dot{\otimes} K_q$, действие на котором корректно задано формулой $a \cdot (bq \dot{\otimes} k) = abq \dot{\otimes} k$, $a \in A, bq \in Aq = H_q, k \in K_q$. Таким образом, элемент $a \in A$ действует на модуле $H_q \dot{\otimes} K_q$ как оператор вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{1}$, где $\mathbf{a} \in \mathcal{B}(H_q)$.

Оказывается, что для любой C^*-алгебры $A \subset \mathcal{B}(H)$ гильбертов модуль H может быть представлен с точностью до изометрического изоморфиз-

[13] Helemskii A. Ya. Projective homological classification of C^*-algebras, Communication in Algebra, 26(3), 977 996, 1998

ма гильбертовых модулей в виде прямой суммы $(\oplus_{q\in\Lambda} H_q \dot{\otimes} K_q) \oplus H_0$, где Λ — некоторое максимальное множество попарно неэквивалентных по Мюррею–фон Нойманну элементарных проекторов из A. H_q — система левых A-модулей вида Aq, K_q — система произвольных гильбертовых пространств, а гильбертов модуль H_0 не содержит ни одного подмодуля, изометрически изоморфного левому модулю вида H_q ни для какого $q \in \Lambda$. При этом для любого проектора $q \in \Lambda$ и векторов $h_1, h_2 \in H_q$ существует оператор $h_1 \diamond h_2 \in A$, который по определению равен нулю на ортогональном дополнении к модулю $H_q \dot{\otimes} K_q$ и переводит произвольный элемент $h \dot{\otimes} k \in H_q \dot{\otimes} K_q$ в $\langle h, h_2\rangle h_1 \dot{\otimes} k$

В этих обозначениях справедлива следующая теорема, которая была доказана Хелемским.

Теорема 2 *Действующая на гильбертовом модуле* $H \approx (\oplus_{q\in\Lambda} H_q \dot{\otimes} K_q) \oplus H_0$ C^**-алгебра* $A \subset \mathcal{B}(H)$ *пространственно проективна тогда и только тогда, когда для любого проектора* $q \in \Lambda$ *справедлива оценка* $\min\{\dim(H_q), \dim(K_q)\} < \infty$, *а подмодуль* H_0 *обладает тривиальным умножением и в случае неунитальной алгебры* A *равен нулю.*

Теперь сформулируем аналог этой теоремы для несамосопряженных операторных алгебр. *Каноническим представлением* модуля H мы будем называть его разложение с точностью до изометрического изоморфизма A-модулей в виде прямой суммы гильбертовых пространств вида $H = (\oplus_{p\in\Phi} H_p \otimes K_p) \oplus H_0$, для которой выполнены следующие условия:

1) Для каждого индекса $p \in \Phi$ элемент $a \in A$ действует на A-модуле $H_p \dot{\otimes} K_p$ как оператор вида $\mathbf{a} \otimes \mathbf{1}$, где $\mathbf{a} \in \mathcal{B}(H_p)$. Кроме того, H_0 — тривиальный модуль относительно действия алгебры A.

2) Для каждого индекса $p \in \Phi$ существует вектор $h_2 \in H_p$ такой, что для любого вектора $h_1 \in H_p$ алгебра A содержит оператор $h_1 \diamond h_2$.

(Здесь, как и выше, символом $h_1 \diamond h_2$ обозначен оператор из A, равный нулю на ортогональном дополнении к подмодулю $H_p \dot{\otimes} K_p$ и переводящий произвольный элемент $h \dot{\otimes} k \in H_p \dot{\otimes} K_p$ в $\langle h, h_2\rangle h_1 \dot{\otimes} k$). Множество всех удовлетворяющих условию 2) векторов h_2 образует замкнутое линейное подпространство в H_p, которое мы обозначим через B_p

Как показал С. Б. Табалдыев[14], для несамосопряженной операторной подалгебры в $\mathcal{B}(H)$ условие проективности модуля H уже не влечет существование канонического представления для этого модуля.

[14]Tabaldyev S B The Sobolev algebra and indecomposable spatially projective algebras. Topological Homology Helemskii's Moscow Seminar Huntington N Y Nova Science Publishers Inc 2000, 201–210

Теорема 3 *Если A-модуль H обладает каноническим представлением $H \approx (\oplus_{p\in\Phi} H_p \hat{\otimes} K_p) \oplus H_0$, то условие его проективности эквивалентно одновременному выполнению следующих условий:*

1) Для любого $p \in \Phi$ верно условие $\min(\dim(H_p), \dim(K_p)) < \infty$.

2) Существует некоторое положительное число N такое, что для любого индекса $p \in \Phi$ справедливо неравенство $\min(\dim(H_p), \dim(K_p)) \leq N \cdot \dim(B_p)$.

3) Если тривиальный подмодуль H_0 не равен нулю, то алгебра A обладает правой единицей.

Отметим, что второе условие для случая C^*-алгебр выполняется всегда, поскольку $\dim(H_p) = \dim(B_p)$ Достаточность этих условий была впервые доказана Хелемским[15].

Главы 4 и 5. В четвертой и пятой главах диссертации рассмотрен случай, когда C^*-алгебра A является алгеброй непрерывных функций $C(\Omega)$ на метризуемом компакте Ω. Известно[16], что каждый сепарабельный унитальный гильбертов $C(\Omega)$-модуль изометрически изоморфен гильбертову модулю, определенному следующим способом. Пусть заданы локально компактное пространство Θ, положительная регулярная борелевская мера μ на этом пространстве (при этом $\mu(\Theta) = 1$) и непрерывное отображение $K : \Theta \to \Omega$. Определим *внешнее произведение* элемента алгебры $f \in C(\Omega)$ и элемента модуля $g \in L^2(\Theta)$ как поточечное произведение функций $g \in L^2(\Theta)$ и $f \circ K \in C(\Theta)$. Тогда $L^2(\Theta)$ является унитальным гильбертовым модулем над $C(\Omega)$.

В четвертой главе диссертации рассматриваются условия проективности банаховых модулей над алгеброй $C(\Omega)$. Заметим, что условия проективности модуля $L^2(\Theta)$ могут быть получены из общих теорем о проективности гильбертова модуля над C^*-алгеброй[17]. Тем не менее в диссертации независимо доказан критерий проективности модуля $L^2(\Theta)$, так как эти рассуждения непосредственно переносятся также и на случай левого модуля $L^1(\Omega)$ над алгеброй $C(\Omega)$ с операцией поточечного умножения (корректно определенного для случая, когда метризуемый компакт Ω снабжен борелевской мерой).

Теорема 4 *Рассмотрим все изолированные точки $x_k, k = 1, \ldots, p$ на*

[15] Helemskii A. Ya. Description of spatially projective operator C^*-algebras, and around it. Banach Algebras '97. Proceeding of the 13th International Conference on Banach Algebras. Walter de Gruyter. Berlin. New York, 1998

[16] Douglas R. G., Paulsen V. I. Hilbert modules over function algebras. Harlow: Longman Sci. and Tech., 1989

[17] Helemskii A. Ya. Projective homological classification of C^*-algebras. Communication in Algebra, 26(3), 977–996, 1998

компакте Ω, прообразы которых $K^{-1}(x_k) \subset \Theta$ относительно отображения $K : \Theta \to \Omega$ имеют положительную меру. Модуль $L^2(\Theta)$ проективен над алгеброй $C(\Omega)$ тогда и только тогда. когда сумма мер этих прообразов равна мере всего пространства Θ.

Для случая $C(\Omega)$-модуля $L^1(\Omega)$ это условие может быть переформулировано следующим образом.

Теорема 5 *Рассмотрим все изолированные точки $x_k.k = 1, \ldots, p$ на компакте Ω, мера которых положительна. Модуль $L^1(\Omega)$ проективен над алгеброй $C(\Omega)$ тогда и только тогда, когда сумма мер этих точек равна мере всего компакта Ω.*

В шестой. заключительной главе диссертации вычисляется проективная гомологическая размерность $C(\Omega)$-модуля $L^1(\Omega)$ для случая метризуемого компакта Ω с борелевской мерой. Оказывается. для этого модуля всегда существует проективная резольвента длины 1. Это связано с возможностью простого описания пространства $C(\Omega) \widehat{\otimes} L^1(\Omega)$ (в силу теоремы Гротендика существует изометрический изоморфизм $C(\Omega) \widehat{\otimes} L^1(\Omega) \approx L^1_{C(\Omega)}(\Omega, \mu)$. где $L^1_{C(\Omega)}(\Omega, \mu)$ пространство измеримых абсолютно интегрируемых отображений из Ω в $C(\Omega)$).

Теорема 6 *Гомологическая размерность модуля $L^1(\Omega)$ равна нулю. если сумма мер введенных выше точек $x_k \in \Omega. k = 1\ldots .p$ равна мере всего компакта Ω, и единице в противном случае.*

Автор приносит глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А. Я. Хелемскому за постоянное внимание к работе и ряд ценных советов, стимулировавших получение новых результатов.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Поляков М. Е. *Гомологические размерности модулей над алгеброй $C(X)$*. Вестник Московского университета. сер.1. математика механика, 2000, Г4, стр. 52- 55

[2] Поляков М Е. *Критерий пространственной проективности одного класса несамосопряженных операторных алгебр*. Казань. Известия Вузов. Математика, Г7, 2001, стр. 32–42

[3] Поляков М. Е. *Пример пространственно неплоской алгебры фонНоймана,* Москва, Труды XXII конференции молодых ученых механико- математического факультета МГУ (17–22 апреля 2000 г.), 2001, стр. 134–137

Отпечатано в отделе оперативной
печати Геологического ф-та МГУ
Тиража 100 экз. Заказ № 52