МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

Философский факультет

На правах рукописи

КАРПЕНКО

Иван Александрович

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА ФОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕВОДОВ

Специальность 09.00.07 – логика

Автореферат

диссертация на соискание ученой степени

кандидата философских наук

Москва – 2003

Работа выполнена на кафедре логики философского факультета Московского государственного факультета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:
Кандидат философских наук, доцент **В.М. Попов**

Официальные оппоненты:
Доктор философских наук, профессор **Е.Е. Ледников**

Кандидат философских наук **В.Б. Петров**

Ведущая организация:
Кафедра логики философского факультета Санкт-Петербургского государственного университета

Защита состоится 2003 года в часов
На заседании Диссертационного совета Д 501.001.48 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора философских наук в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова.
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан____________2003 года
Ученый секретарь Диссертационного совета
Кандидат философских наук Д.В. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современной логике все чаще применяются различного рода переводы для изучения логических систем. Использование специального вида переводов – погружающих операций – позволяет устанавливать разрешимость и неразрешимость логических систем, проводить доказательства отделимости фрагментов логических исчислений, интерпретировать одно логическое исчисление в семантике другого логического исчисления, выявлять дедуктивные возможности формальных теорий.

Если в лингвистике теория перевода начала разрабатываться ещё в XVI веке, то в логике к её формированию приступили только в середине XX века[1]. Естественно, первые логические переводы были предприняты намного раньше[2]. Хотя до сих пор не существует завершенной логической теории перевода, появление большого количества работ, посвященных данной проблеме, свидетельствует об её актуальности.

В логике перевод одного исчисления в другое осуществляется посредством отображения, сопоставляющего формулам языка первого исчисления формулы языка второго исчисления. Это отображение, вслед за Н.А. Шаниным, принято называть "погружающей операцией", хотя отображение далеко не всегда является операцией (погружающие операции строят также для исчислений, сформулированных в разных языках). Кроме того, вслед за В.А. Смирновым, различают перевод и погружающую операцию.

---

[1] Шанин Н.А. О некоторых логических проблемах арифметики//Тр. Мат. Ин-та им. В.А.Стеклова. №43. 1955.

[2] Колмогоров А.Н. О принципе tertium non datur//Мат. Сб. №32. 1925.

Для ясности приведем здесь наиболее общее определение погружающей операции, предложенное В.А. Смирновым[3].

Пусть T_1 и T_2 теории, сформулированные соответственно в языках L_1 и L_2 с соответствующими логиками. Пусть φ – рекурсивная функция, сопостовляющая формулам языка L_1 формулы языка L_2 для всякой L_1-формулы А. Функция φ называется переводом теории T_1 в T_2, если выполняется условие: если $A \in T_1$, то $\varphi(A) \in T_2$. Если выполняется дополнительное условие: если $\varphi(A) \in T_2$, то $A \in T_1$, то рекурсивная функция φ называется погружающей операцией теории T_1 в теорию T_2. Теория T_1 погружаема в теорию T_2, если и только если существует рекурсивная функция, погружающая T_1 в T_2.

Функция φ называется погружением исчисления C_1, язык которого есть L_1, в исчисление C_2, язык которого есть L_2, если для всякой L_1-формулы α выполняется следующее условие:

$\vdash_{C1} A$, т.т.т. $\vdash_{C2} \varphi(A)$.

Применение погружающих операций для изучения логических систем оправдывается некоторыми свойствами логических систем, которые возможно устанавливать посредством погружающих операций. Имеет смысл рассматривать эти свойства в философском и техническом аспектах погружения.

В философском плане, погружение позволяет изображать одну теорию в терминах другой. Погружение неинтерпретированного исчисления в исчисление, наделенное семантикой, решает проблему семантической осмысленности формул первого из этих исчислений и

[3] Смирнов В.А. Логические методы анализа научного знания. М., 2002. С. 119-129.

способствует тем самым пониманию того, какова природа логических отношений, формализованных в этом исчислении.

Встает вопрос о роли отрицания в языке: погружая исчисление, язык которого содержит негацию, в другое позитивное исчисление или собственную позитивную часть, мы получаем возможность формулировать истины первого исчисления только утвердительными выражениями, то есть, не говоря "не".

В техническом аспекте, как уже говорилось ранее, следует обратить внимание на проблему разрешимости. Так, в результате погружения какого-либо исчисления в какое-либо разрешимое исчисление положительно решается вопрос о разрешимости первого, в результате погружения какого-либо неразрешимого исчисления C_1 в какое-либо исчисление C_2 устанавливается неразрешимость исчисления C_2, погружение исчисления C в его фрагмент, язык которого не содержит некоторых логических констант, имеющихся в языке L исчисления C, позволяет изображать теоремы исчисления C теоремами этого же исчисления, записанными на языке, число логических констант которого, меньше чем в L. Например, В.М.Попов[4] погружает исчисление, аксиоматизирующее классическую пропозициональную логику, в его импликативный фрагмент, а также в импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики. С использованием погружающих операций доказывается отделимость фрагментов в исчислениях, что было показано В.М. Поповым[5].

[4] Попов В.М. Погружение классической пропозициональной логики в её импликативный фрагмент и в импликативный фрагмент интуиционистской пропозициональной логики//Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН. М., 2000.

[5] Попов В.М. Погружение интуиционистского пропозиционального исчисления в его позитивный фрагмент//Логические исследования. Вып.8. М.: Наука, 2001. С.183-184.

Указанные здесь свойства имеют большое значение для понимания логических систем, и, как становиться ясно в современной логике, аппарат погружающих операций удобен для доказательства наличия этих свойств.

Степень разработанности проблемы. Помимо упомянутых выше логиков, попытки дать определения погружающим операциям и систематизировать их предпринимались Д. Правицом и П.Мамносом[6], В. Карниэлли и Д'Оттавиано[7], Р. Эпштейном[8]. Последний предложил определение перевода, претендующее на универсальность.

Одним только погружением классической логики в интуиционистскую занимались такие ученые, как Гливенко[9], Гедель[10], Лукасевич[11], Генцен[12].

Среди современных российских ученых, отдавших дань изучению логических систем посредством погружающих операций, необходимо указать В.А. Бочарова[13], М.Захарьяшева, В.И. Маркина[14], А.В.Чагрова. В.А. Бочаров строит погружение булевой алгебры в силлогистику. В.И. Маркин осуществляет погружение систем чистой позитивной силлогистики аристотелевского типа в исчисление предикатов. Труд М.

---

[6] Prawitz D. & Malmnâs P.E. A survey of some connections between classical, intuitionistic and minimal logic. Amsterdam: North-Holland. P.215-229.

[7] Carnielli W.A. &D'Ottaviano M L. Translations between logical systems: A MANIFESTO//Logique et Analyse. N 157. P.67-81.

[8] Epstein R.L. The semantic foundations of logic. Vol.1: Propositional logic. Dordrecht: Kluwer, 1990.

[9] Glivenko M. Sur quelques points de la logique de M.Brouwer. Acadèmie Royale de Belgique, Bulletins de la classe des sciences, ser.5. Vol.15. P. 183-188.

[10] Gôdel K. Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie//Ergebnisse eines mathematischen Kolloquims. Vol.4. 1933a. P. 34-38.

[11] Lukasiewicz J. On the intuitionistic theory of deduction. Konikl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A, no. 3. 1952. P.202-212.

[12] Gentzen G. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie//Mathematische Annalen. Vol.112. 1936. P.493-565.

[13] Бочаров В.А. Булева алгебра в терминах силлогистики//Логические исследования (Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР). М., 1983.

[14] Маркин В.И. Силлогистические теории в современной логике. М., 1991.

Захарьяшева и А.В. Чагрова[15] посвящен погружениям интуиционистской логики и её расширений в различные нормальные модальные логики.

Научная новизна исследования. Как уже отмечалось, в логике не существует единой теории перевода. Исследования по данному вопросу ограничиваются самостоятельными работами отдельных ученых, которые предлагают свои определения погружающих операций и выдвигают требования к этим операциям. Классификацией погружающих операций и их максимально строгими определениями стали заниматься сравнительно недавно. В предлагаемой работе рассмотрены некоторые, на наш взгляд, самые важные определения погружающих операций, как в историческом плане, так и в плане использования для доказательства конкретных задач о погружаемости. Проводится сравнение этих определений.

В главах II, III и IV приводятся результаты о погружениях некоторых исчислений – эти результаты перечислены в пункте: **основные положения, выносимые на защиту.**

Цель и задачи исследования. Цель работы: сравнительный анализ имеющихся в современной логической науке определений понятий "перевод", "погружающая операция", выявление видов погружающих операций, описание задач, решаемых с использованием погружающих операций, анализ посредством построения погружающих операций отношений между классической пропозициональной логикой с одной стороны, и паранепротиворечивыми[16] и параполными[17] логиками с другой, а также изучение проблемы погружаемости логики в её

---

[15] Chagrov A., Zakharyashchev M. Modal Companions of Intermediate Propositional Logics//Studia Logica 51. 1992. P. 49-82.

[16] Логика L называется паранепротиворечивой, если существует противоречивая L-теория, которая не равна множеству всех формул.

[17] Логика L называется параполной, если существует такая L-теория T, что T не является полной L-теорией и всякая полная теория, включающая T, равна множеству всех формул.

позитивный фрагмент на примерах недистрибутивных релевантных логик и слабо-релевантной логики RM.

Методологический основой исследования является аппарат современной логики. Для доказательств используются исчисления гильбертовского и секвенциального типов.

Основные положения, выносимые на защиту. 1) Доказываются теоремы о погружении пропозициональных вариантов абсолютного (HAp) и сильного (HSp) исчислений В.А. Смирнова[18], в их позитивный фрагмент ($HA_{+}p$). Исчисления HAp и HSp являются недистрибутивными релевантными исчислениями гильбертовского типа. Эти исчисления имеют естественную дедуктивную мотивацию, а их удобные для поиска доказательства секвенциальные формулировки часто используются при изучении вопроса о доказуемости формул в различных релевантных логиках.

2) Доказываются теоремы о погружении классической пропозициональной логики (PC) в ряд паралогик[19] (I_0, I_1, I_2, I_3[20], MAP[21] и LAP[22]). Эти паралогики имеют семантики, которые строятся в философски значимых терминах описания состояния и простые секвенциальные формулировки. Все рассматривамые в диссертации паралогики конечнозначны.

---

[18] Смирнов В.А. Теория логического вывода. М , РОССПЭН, 1999. С. 81-82.

[19] Паралогика – логика, которая является или паранепротиворечивой или параполной, или паранепротиворечивой и параполной.

[20] Popov V.M. On the Logics Related to A.Arruda`s System V1//Logic and Logical Philosophy. Vol.7, pp.87-90, 1999.

[21] Попов В.М. Об одной трехзначной паранепротиворечивой логике//Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Санкт-Петербург, 2002.

[22] Попов В.М. Об одной трехзначной параполной логике//Логические исследования. Вып.9, М , Наука, 2002.

3) Доказывается теорема о погружении исчисления RM[23] в его позитивный фрагмент RM_+. Исчисление RM является слабо-релевантным исчислением гильбертовского типа. Это исчисление хорошо известно в логической науке, и является одним из базовых исчислений, изучаемых в релевантной логике.

Практическая значимость исследования. Сравнительный анализ определений погружающих операций предоставляет в распоряжение теоретическую базу для дальнейших разработок в этой области. Определенные в диссертационном исследовании отображения могут применяться при изучении паранепротиворечивых, параполных и релевантных логик. Устанавливаемые факты погружения исчислений в их собственные позитивные фрагменты открывают в ряде случаев возможность ограничиться при исследовании такого рода исчислений изучением их позитивных фрагментов. Результаты диссертационного исследования могут быть использованы при чтении курсов по паранепротиворечивым, параполным и релевантным логикам.

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования отражены в трех научных работах автора, и обсуждались на кафедре логики философского факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, на семинарах сектора логики Института Философии РАН, на 4-х Смирновских чтениях по логике (Москва, 2003).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Основное содержание работы

[23] Anderson A. R., Belnap N. D, jr. Entailment: The logic of relevance and necessity. Vol. 1.

Основное содержание работы

Во введении формулируются цели и задачи исследования, формулируются основные положения, выносимые на защиту, обосновывается актуальность темы диссертации, указывается то новое, что, по мнению автора, привносит предлагаемая работа в изучение формальных переводов

В первой главе **"Понятия перевода и погружения, их определения и примеры построения погружений"** даются различные определения погружающих операций, сравниваются определения, приводятся примеры конкретных погружений.

В этой главе приводится определение погружающей операции, принадлежащее В.А. Смирнову, и осуществляются реконструкции определений погружающих операций, принадлежащих Р.Вуйцицкому[24] и Р.Эпштейну.

Определение В.А Смирнова было представлено в пункте **актуальность темы.**

Вуйцицкий предлагает следующее определение.

Пусть языки L_1 и L_2 – стандартно определяемые пропозициональные языки и множество $\{p_1,p_2,p_3,\ldots\}$ всех пропозициональных переменных языка L_1 равно множеству всех пропозициональных переменных языка L_2, C_1 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_1, C_2 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_2, T_1 есть C_1-теория и T_2 есть C_2-теория.

---

[23] Anderson A R., Belnap N D., jr Entailment The logic of relevance and necessity Vol I. Princeton, 1975. pp 339-341

[24] Wojcicki R Theory of Logical Calculi Basic Theory of Consequence Operations Dordrecht: Kluwer, 1988

(1) существует формула ϕ в L_2 от одной пропозициональной переменной p_i такая, что для всякой пропозициональной переменной p, $\varphi(p)=[p_i/p]\phi$, где $[p_i/p]\phi$ есть результат подстановки p вместо p_i в ϕ,

(2) для всякой k-местной ($k\geq 0$) связки r_i языка L_1 существует формула ϕ_i языка L_2 такая, что для всяких формул $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ языка L_1

$$\varphi(r_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_k))=[p_1/\varphi(\alpha_1),\ldots,p_k/\varphi(\alpha_k)]\phi_i,$$

где $[p_1/\varphi(\alpha_1),\ldots,p_k/\varphi(\alpha_k)]\phi_i$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha_1)$ вместо p_1, …, $\varphi(\alpha_k)$ вместо p_k в ϕ.

Погружающей операцией теории T_1 в теорию T_2 называется любое i-погружение языка L_1 в язык L_2 такое, что для всякой формулы α языка L_1 верно следующее:

$$\alpha\in T_1 \text{ т.т.т. } \varphi(\alpha)\in T_2.$$

Погружающей операцией исчисления C_1 в исчисление C_2 называется i-погружение языка L_1 в язык L_2 такое, что для всякой формулы α языка L_1 верно следующее:

$$\vdash_{C1}\alpha, \text{ т.т.т. } \vdash_{C2}\varphi(\alpha).$$

Эпштейн предлагает следующее определение:

Пусть $L_{\supset\neg}$ есть стандартно определяемый пропозициональный язык, множество всех логических констант которого есть $\{\supset,\neg\}$, при этом $\supset$ – бинарная, а $\neg$ – унарная логическая связка языка $L_{\supset\neg}$. Пусть L_1 и L_2 – стандартно определяемые языки, C_1 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_1, C_2 есть пропозициональное исчисление, язык которого есть L_2.

Погружением исчисления C_1 в исчисление C_2 назовем отображение φ множества всех L_1-формул во множество всех L_2-формул такое, что для всякой L_1-формулы α и всякого множества Γ L_1-формул выполняется следующее условие:

$$\Gamma \vdash_{C1} \alpha, \text{ т.т.т. } \varphi(\Gamma) \vdash_{C2} \varphi(\alpha),$$

где $\varphi(\Gamma)=\{\varphi(\alpha):\alpha\in\Gamma\}$.

Пусть A, B и C есть L_1-формулы. i-грамматическим A-B-C отображением (i – натуральное число) языка $L_{\supset\neg}$ в язык L_1 такой, что множество всех пропозициональных переменных языка $L_{\supset\neg}$ равно множеству всех пропозициональных переменных языка L_1, по Эпштейну называется отображение * множества всех $L_{\supset\neg}$-формул во множество всех L_1-формул, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\varphi(p)=[p_i/p]A$, где $[p_i/p]A$ есть результат подстановки p вместо p_i в формулу A,

2) $\varphi(\alpha\supset\beta)=[p_1/\varphi(\alpha),p_2/\varphi(\beta)]B$, где α и β есть формулы языка $L_{\supset\neg}$, а $[p_1/\varphi(\alpha), p_2/\varphi(\beta)]B$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha)$ вместо p_1 и $\varphi(\beta)$ вместо p_2 в формулу B,

3) $\varphi(\neg\alpha)=[p_1/\varphi(\alpha)]C$, где α есть формула языка $L_{\supset\neg}$, а $[p_1/\varphi(\alpha)]C$ есть результат подстановки $\varphi(\alpha)$ вместо p_1 в формулу C.

Грамматическим погружением исчисления C_1, язык которого есть $L_{\supset\neg}$ в исчисление C_2, языку которого принадлежат все те и только те пропозициональные переменные, которые принадлежат языку $L_{\supset\neg}$ по Эпштейну называется погружение φ исчисления C_1 в исчисление C_2 такое, что для некоторых L_1-формул A, B и C и некоторого натурального числа i φ есть i-грамматическое A-B- C-отображение языка $L_{\supset\neg}$ в язык исчисления C_2.

Легко заметить, что В.А. Смирнов определяет погружение для теорий и исчислений, Вуйцицкий – для языков, теорий и исчислений, Эпштейн для исчислений. Таким образом, и В.А. Смирнов и Вуйцицкий и Эпштейн определяют погружение исчисления в исчисление. Сравним эти определения. Определения Вуйцицкого и Эпштейна отличаются от определения В.А. Смирнова по существу только наличием требования индуктивного определения погружающей операции. Поэтому всякое погружение в смысле Вуйцицкого и всякое грамматическое погружение в смысле Эпштейна является погружением в смысле В.А. Смирнова. Эпштейн в определении погружающей операции ставит обязательным условием того, что отображение φ есть грамматическое погружение исчисления C_1 в исчисление C_2 более сильное требование, чем в соответствующем определении Вуйцицикий. Требование Эпштейна таково: для всякого множества Γ формул языка исчисления C_1 и всякой формулы α данного языка верно, что $\Gamma\vdash_{C1}\alpha$, т.т.т. $\varphi(\Gamma)\vdash_{C2}\varphi(\alpha)$. Согласно определению Вуйцицкого, погружение φ исчисления C_1 в исчисление C_2 удовлетворяет следующему условию: $\vdash_{C1}\alpha$, т.т.т. $\vdash_{C2}\varphi(\alpha)$. В пункте (1) определения погружающей операции по Вуйцицкому требуется существование формулы ϕ от одной пропозициональной переменной p_0 такой, что для всякой пропозициональной переменной p, $\varphi(p)=[p_0/p]\phi$, где $[p_0/p]\phi$ есть результат подстановки p вместо p_0 в ϕ. Из текста Эпштейна не вполне ясна его позиция относительно аналогичного требования в пункте 1) определения погружающей операции, но если допустить, что он выдвигает такое же требование, то справедливо заключить, что всякое грамматическое погружение в смысле Эпштейна является погружением в смысле Вуйцицкого. В противном случае, если Эпштейн не выдвигает такое требование, можно предположить, что существуют исчисления, которые погружаются в смысле Вуйциицкого, но не погружаются грамматически в смысле Эпштейна, и существуют исчисления, которые грамматически погружаются в смысле Эпштейна, но не погружаются в смысле Вуйциицкого. Однако, вопрос о существовании таких исчислений пока никем не изучен.

Широкое применение погружающих операций в современной логике, по мнению автора диссертации, состоит в следующем: погружение позволяет изображать одну теорию в терминах другой; погружение неинтерпретированного исчисления в исчисление, наделенное семантикой, решает проблему семантической осмысленности формул первого из этих исчислений и способствует тем самым пониманию того, какова природа логических отношений, формализованных в этом исчислении; в результате погружения какого-либо исчисления в какое-либо разрешимое исчисление положительно решается вопрос о разрешимости первого; в результате погружения какого-либо неразрешимого исчисления C_1 в какое-либо исчисление C_2 устанавливается неразрешимость исчисления C_2, погружение исчисления C в его фрагмент, язык которого не содержит некоторых логических констант, имеющихся в языке L исчисления C, позволяет изображать теоремы исчисления C теоремами этого же исчисления, записанными на языке, число логических констант которого, меньше чем в L; погружающие операции используются при доказательстве отделимости фрагментов в исчислениях.

Приводится историческая справка о возникновении и развитии логических погружений и конкретные погружения одних исчислений в другие на примере пропозициональных классической и интуиционистской логик. Выбор этой пары логик обусловлен тем, что первые в истории логической науки погружения строились для классической и интуиционистской систем, а также их популярностью.

В **главах II, III** и **IV** решен ряд задач по построению погружений. Введем ряд определений и обозначений, которые используются при формулировке утверждений о погружении, доказанных в главах II, III и IV.

В диссертации рассматриваются исчисления только двух видов: исчисления гильбертовского типа и исчисления в секвенциальной форме. Во всех рассматриваемых исчислениях доказательства строятся обычным для соответствующего вида исчислений образом, поэтому далее при задании исчислений определение доказательства в них опускается. Предполагается, что определение доказуемой формулы в любом рассматриваемом исчислении гильбертовского типа и определение доказуемой секвенции в любом секвенциальном исчислении стандартны. Чаще всего в предлагаемой работе используются четыре языка $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$, $L_{\wedge\vee\supset\neg}$, $L_{\wedge\vee\supset f}$, $L_{\wedge\vee\supset}$, которые являются стандартно определяемыми пропозициональными языками с алфавитами с алфавитами <S, ∧, ∨, ⊃, ¬, f), (>, <S, ∧, ∨, ⊃, ¬,), (>, <S, ∧, ∨, ⊃, f,), (>, <S, ∧, ∨, ⊃,), (>, где S есть множество $\{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ всех пропозициональных переменных соответствующего языка; ⊃, ∧, ∨ есть бинарные логические связки каждого из этих языков, ¬ есть унарная логическая связка языков $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$, $L_{\wedge\vee\supset\neg}$, f есть пропозициональная константа языков $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$ и $L_{\wedge\vee\supset f}$,) и (есть технические символы (скобки) каждого из этих языков. При записи формул в языке L иногда применяются обычные соглашения об опускании скобок, вместо "формула в языке L" будем писать "L-формула". Если *C* есть исчисление гильбертовского типа, L – язык этого исчисления и A есть L-формула, то запись "$\vdash_C A$" есть сокращение для "

L-формула A доказуема в *C*", а если *C* есть секвенциальное исчисление, L – язык этого исчисления и $A_1,\ldots,A_m$, $B_1,\ldots,B_n$, где m и n целые неотрицательные числа, есть L-формулы, то " $\vdash_C A_1,\ldots,A_m \rightarrow B_1,\ldots,B_n$" есть сокращение для "секвенция $A_1,\ldots,A_m \rightarrow B_1,\ldots,B_n$" доказуема в C". Если $L \in \{L_{\wedge\vee\supset\neg f}, L_{\wedge\vee\supset\neg}, L_{\wedge\vee\supset f}, L_{\wedge\vee\supset}\}$, то a) посредством "$MP_L$" обозначается правило модус поненс в языке L, т.е множество всех упорядоченных троек, задаваемых схемой $A \supset B, A/B$, где A и B есть L-формулы, b) посредством "I_L" обозначаем правило адьюнкции в языке L, т.е. множество всех упорядоченных троек, задаваемых схемой $A, B/A \wedge B$, где A и B есть L-формулы.

Итак, в главе II **"Погружение абсолютного и сильного исчислений В.А. Смирнова в их позитивный фрагмент"** доказываются теоремы о погружении пропозициональных вариантов абсолютного (HAp) и сильного (HSp) исчислений В.А. Смирнова (см. сноску 19 на стр. 6) в их позитивный фрагмент ($HA_{+}p$). Исчисления HAp и HSp являются недистрибутивными релевантными исчислениями гильбертовского типа. Для формулировки этих теорем потребуются определения операций $[f/p_1]$, Сд, $[\neg/f]$ и T.

Определение операции $[f/p_1]$:

$[f/p_1](f) = p_1$,

$[f/p_1](p_i) = p_i$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$[f/p_1](A \bullet B) = [f/p_1](A) \bullet [f/p_1](B)$, где $\bullet \in \{\wedge\vee\supset\}$ для всяких $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$-формул A и B и всякой бинарной логической связки $\bullet$ языка $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$,

$[f/p_1](\neg A) = \neg[f/p_1](A)$ для всякой $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$-формулы A.

Определение операции Сд:

$Сд(f) = f$,

$Сд(p_i) = p_{i+1}$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$Сд(A \bullet B) = Сд(A) \bullet Сд(B)$, где $\bullet \in \{\wedge \vee \supset\}$ для всяких $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$-формул A и B и всякой бинарной логической связки $\bullet$ языка $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$,

$Сд(\neg A) = \neg Сд(A)$ для всякой $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$-формулы A.

Определение операции $[\neg/f]$:

$[\neg/f](f) = f$,

$[\neg/f](p_i) = p_i$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$[\neg/f](A \bullet B) = [\neg/f](A) \bullet [\neg/f](B)$ для всяких $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$-формул A и B и всякой бинарной логической связки $\bullet$ языка $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$,

$[\neg/f](\neg A) = [\neg/f](A) \supset f$ для всякой $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$-формулы A.

Определение операции T:

$T(f) = \neg(\neg f)$,

$T(p_i) = \neg(\neg p_i)$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$T(A \bullet B) = \neg(\neg(T(A) \bullet T(B)))$ для всяких $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$-формул A и B и всякой бинарной логической связки $\bullet$ языка $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$,

$T(\neg A) = \neg(\neg(\neg T(A)))$ для всякой $L_{\supset\neg\wedge\vee f}$-формулы A.

Теорема: для всякой $L_{\supset\neg\wedge\vee}$-формулы α верно, что $\vdash_{HAp}\alpha$ т.т.т. $\vdash_{HA+p}[f/p_1](Сд([\neg/f](\alpha)))$.

Теорема*: для всякой $L_{\supset\neg\wedge\vee}$-формулы α верно, что $\vdash_{HSp}\alpha$ т.т.т. $\vdash_{HA+p}[f/p_1](Сд([\neg/f](T(\alpha))))$.

В главе III "Погружение классической пропозициональной логики в некоторые паралогики" доказываются теоремы о погружении классической пропозициональной логики (PC) в ряд паралогик (I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP]) (см. сноски 20, 21, 22, 23 на стр.7) Для формулировки этих теорем потребуется определения операций ψ, h_φ и χ.

Определение операции ψ:

$\psi(p_i) = \neg p_i$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$\psi(A \bullet B) = \psi(A) \bullet \psi(B)$, где $\bullet \in \{\wedge \vee \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$\psi(\neg A) = \neg\psi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции h_φ:

Пусть φ – эффективное отображение множества всех пропозициональных переменных во множество всех формул, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\varphi(p_i)$ не есть квазиэлементарная формула[25] ни для какой пропозициональной переменной p_i,

(2) для всякой пропозициональной переменной p_i формулы $p_i \supset \varphi(p_i)$ и $\varphi(p_i) \supset p_i$ принадлежат логике PC.

Тогда

$h_\varphi(p_i)=\varphi(p_i)$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$h_\varphi(A \bullet B)=h_\varphi(A) \bullet h_\varphi(B)$, где $\bullet \in \{\wedge, \vee, \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$h_\varphi(\neg A)=\neg h_\varphi(A)$, где A произвольная формула.

Определение операции χ:

$\chi(p_i) = p_i$ для всякой пропозициональной переменной p_i,

$\chi(A \bullet B) = \chi(A) \bullet \chi(B)$, где $\bullet \in \{\wedge \vee \supset\}$, а A и B произвольные формулы,

$\chi(\neg A) = \chi(A) \supset (\neg(p_1 \supset p_1))$, где A произвольная формула.

Теорема**: для всякого i из {0,1,2,3} и всякой формулы α верно, что $\vdash_{PC}\alpha$ т.т.т. $\vdash_{Ii}\psi(\alpha)$.

Теорема***: для всякого i из {0,1,2,3}, всякой формулы α и всякого эффективного отображения φ, удовлетворяющего условиям (1) и (2) из определения операции h_φ верно, что $\vdash_{PC}\alpha$ т.т.т. $\vdash_{Ii}h_\varphi(\alpha)$.

[25] Квазиэлементарной формулой называется формула, которая не имеет вхождений ни одной из логических связок $\wedge, \vee, \supset$.

Теорема****: для всякого исчисления E из {I_0, I_1, I_2, I_3, MAP и LAP} и всякой формулы α верно, что $\vdash_{PC}\alpha$ т.т.т. $\vdash_{E}\chi(\alpha)$.

Важно отметить, что в теоремах с обозначениями ** и *** классическая пропозициональная логика погружается в одни и те же паралогики двумя различными способами. В случае двух этих теорем осуществляется гомофонное, в терминологии Эпштейна, погружение (связки отображаются сами в себя). Однако, не для всех логик применимы гомофонные погружающие операции. Например, известно, что не существует гомофонного погружения между классической и интуиционистской логиками.

В главе IV **"Погружение исчисления RM в его позитивный фрагмент"** доказывается теорема о погружении исчисления RM (см. сноску 24 на стр.7) в его позитивный фрагмент RM_+. Исчисление RM является слабо-релевантным исчислением гильбертовского типа. Для формулировки этих теорем потребуются определения операций Сд и $S_{\neg/p1}$.

Определение отображения Сд множества F всех $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формул в F:

Сд(f) = f,

Сд(p_i) = p_{i+1} (где i принадлежит множеству N всех натуральных чисел),

Сд(A•B) = Сд(A)•Сд(B) (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формулы, а $\bullet\in\{\wedge\vee\supset\}$),

Сд($\neg$A) = $\neg$Сд(A) (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg f}$-формула).

Определение отображения $S_{\neg/p1}$ множества F` всех $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формул в F`:

$S_{\neg/p1}(p_i) = (p_i\supset p_1)\supset p_1$ (где $i\in N$),

$S_{\neg/p1}(A\bullet B) = ((S_{\neg/p1}(A)\bullet S_{\neg/p1}(B))\supset p_1)\supset p_1$ (где A и B есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы, а $\bullet\in\{\wedge\vee\supset\}$),

$S_{\neg/p1}(\neg A) = ((S_{\neg/p1}(A)\supset p_1)\supset p_1)\supset p_1$ (где A есть $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формула).

Теорема*****: для всякой $L_{\wedge\vee\supset\neg}$-формулы α верно следующее: $\vdash_{RM}\alpha$ т.т.т. $S_{\neg/p1}(\text{Сд}(\alpha))\in RM_{+}$.

Помимо определенных здесь операций Сд и $S_{\neg/p1}$ при доказательстве теоремы используются ещё некоторые операции. В данном случае достаточно ограничиться уже указанными, поскольку только они необходимы для формулировки теоремы. В главе IV, естественно, все определения присутствуют.

Погружения исчислений в их позитивные фрагменты построены в двух главах настоящей работы. В **заключении** подводятся итоги проделанной работы, и приводится пример исчисления, которое не погружается в собственный позитивный фрагмент (этот пример важен для понимания того факта, что далеко не все исчисления обладают подобным свойством). Постановкой вопроса о возможности погружения релевантной логики R[26] в свой позитивный фрагмент оканчивается диссертация.

Результаты диссертации нашли свое отражение в следующих работах автора:

1. Karpenko I.A. Logics HAp and HSp are embedded into logic $HA_{+}p$//Смирновские чтения. 4 международная конференция. М., 2003. С.77.
2. Карпенко И.А. Погружение классической пропозициональной логики в некоторые паралогики (в печати).
3. Карпенко И.А., Попов В.М. Погружение исчисления RM в его позитивный фрагмент (в печати).

[26] Anderson A. R., Belnap N. D., jr. Entailment: The logic of relevance and necessity. Vol. 1. Princeton, 1975, pp 339-341.

Отпечатано в копицентре «Учебная полиграфия»
Москва, Ленинские горы, МГУ, 1 Гуманитарный корпус.
www.stprint.ru e-mail: zakaz@stprint.ru тел 939-3338
Заказ № 380, тираж 75 экз. Подписано в печать 26. 09. 2003 г.