На правах рукописи

Антипина Наталья Валерьевна

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ ПРОЦЕССОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность 01.01.09 – "Дискретная математика и
математическая кибернетика"

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Иркутск – 2003

Работа выполнена в Институте математики и экономики Иркутского государственного университета

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Дыхта Владимир Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Сесекин Александр Николаевич;
	кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Урбанович Дмитрий Евгеньевич
Ведущая организация	Российский университет Дружбы Народов, г. Москва

Защита состоится 19 сентября 2003 г. в 14^{00} часов на заседании диссертационного совета **Д 212.074.01** в Иркутском государственном университете по адресу: 664003, г. Иркутск, б. Гагарина, 20.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Иркутского государственного университета (б. Гагарина, 24).

Автореферат разослан 16 августа 2003 года

Ученый секретарь
диссертационного совета Аргучинцева М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Основным объектом данного исследования являются *вырожденные* (нерегулярные) задачи оптимального управления, характеризующиеся линейностью динамической системы по управлению и неограниченностью понтрягинского множества U возможных значений управления. Эти задачи, как правило, не имеют решения в обычном классе измеримых ограниченных управлений и допускают естественное релаксационное расширение, при котором множество допустимых управлений расширяется до импульсных – общих распределений первого порядка сингулярности (L_∞-расширение по траекториям, возможное при U, совпадающем со всем пространством), или до более узкого класса векторных мер (BV-расширение траекторий, естественное, если U – выпуклый замкнутый конус).

Для таких задач оптимизации, благодаря работам В.И. Гурмана, Н.Н. Красовского, С.Т. Завалищина, В.Ф. Кротова, Г.А. Колокольниковой, Б.М. Миллера, Ю.В. Орлова, А.Н. Сесекина, А. Брессана, Р. Винтера, М. Мотта, Ф. Перейра, Ф. Рампаццо, Р. Ришела и других математиков, можно считать построенными теорию обобщенных, разрывных решений нелинейных дифференциальных систем и включений, теорию необходимых условий их оптимальности первого порядка, основы метода динамического программирования, а также квадратичные необходимые и достаточные условия локальной оптимальности импульсных процессов с траекториями из L_∞ (результаты В.А. Дыхты и И.А. Никифоровой).

Несмотря на это, теория достаточных условий оптимальности в задачах импульсного управления еще далека от своего завершения в сравнении с соответствующим направлением в классических задачах оптимального управления. Особенно это касается задач оптимизации в динамических системах без так называемого условия корректности по импульсно-траекторному расширению (условия Фробениуса) и задач с траекториями ограниченной вариации и конусными ограничениями на управление. Например, для таких задач неизвестны квадратичные достаточные условия локальной оптимальности типа Якоби в вариационном исчислении и не выработано единого понимания уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.

С последним фактом связан еще один пробел: было неясно, какие достаточные условия оптимальности для вырожденных задач управления можно получить, отправляясь от идеи использования произвольного семейства *функций типа Ляпунова-Кротова* – монотонно не возрастающих вдоль всех траекторий управляемой системы данной задачи оптимизации.

В классических задачах оптимального управления повышение интереса к таким условиям было вызвано недавними результатами и изящными примерами А.А. Милютина, предложившим *каноническую теорию* сильного экстремума, опирающуюся на использование произвольного семейства решений уравнения Гамильтона-Якоби. Ранее аналогичную идею предложил В.А. Дыхта в качестве модификации условий В.Ф. Кротова, однако он использовал более широкое множество решений неравенства Ляпунова-Кротова (неравенства Гамильтона-Якоби-Беллмана, иногда называемого квазивариационным). Значение достаточных условий оптимальности, которые получаются при этом подходе (мы оставляем за ним название канонического), состоит в гораздо более широком ареале применимости в сравнении с методами Р. Беллмана и В.Ф. Кротова и их негладкими обобщениями, даже если при его реализации не прибегать к негладким решениям неравенства Ляпунова-Кротова. В частности, этот подход позволил получить наиболее тонкие достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина (ПМП) для классических задач оптимального управления [1] (эти результаты обобщаются в гл.1 диссертации, а затем используются в гл.2).

Применительно к управляемой системе

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U \tag{1}$$

неравенство Ляпунова-Кротова с неизвестной дифференцируемой функцией $\varphi(t, x)$ можно определить через гамильтониан системы (1)

$$\mathcal{H}(t, x, \psi) = \sup\left\{\langle \psi, f(t, x, u)\rangle \mid u(t) \in U\right\} \tag{2}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom}\mathcal{H} = \Big\{(t, x, \psi) \mid \mathcal{H}(t, x, \psi) < \infty \\ \text{и точная верхняя грань в (2) достигается}\Big\}$$

[1] Дыхта В.А. *Неравенство Ляпунова-Кротова и достаточные условия в оптимальном управлении*// Итоги науки и техн. Совр. мат. и ее приложения / ВИНИТИ РАН, 2002.

и записать его в виде пары соотношений в частных производных

$$\varphi_t + \mathcal{H}(t, x, \varphi_x) \le 0, \quad (t, x, \varphi_x) \in \mathrm{dom}\, \mathcal{H} \tag{3}$$

(они должны выполняться на подходящим образом выбранном множестве Q переменных t, x). В обсуждаемых достаточных условиях оптимальности используется очевидный факт: любое решение неравенства (3) задает внешнюю оценку множества достижимости управляемой системы на Q. Поэтому, если поставлена некоторая задача оптимального управления в терминальной форме с системой (1), то ее можно попытаться свести к конечномерной задаче оптимизации.

Цель работы состояла в доказательстве достаточных условий глобальной и локальной оптимальности импульсных процессов, основанных на использовании семейств решений дифференциального неравенства Ляпунова-Кротова, а также их применении к некоторым прикладным моделям импульсного управления. При этом основной акцент сделан на достаточных условиях оптимальности, которые можно получить путем подходящего усиления необходимых условий оптимальности первого порядка.

Реализация этого замысла естественным образом привела к необходимости его воплощения сначала для классических задач оптимального управления, применительно к которым полученные результаты можно трактовать как обращение ПМП в достаточное условие оптимальности.

Методы исследования основываются на квадратичных условиях локального экстремума в задачах с ограничениями, теории условий оптимальности в классических и импульсных задачах управления (принципе максимума, обобщенных условиях стационарности, вариационном принципе максимума) и канонической теории сильного экстремума.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту. Научная новизна состоит в выделении классов нелинейных и невыпуклых задач оптимального управления (как классических, так и импульсного характера), для которых возможно обращение соответствующих необходимых условий оптимальности первого порядка в достаточные условия локального и глобального экстремума. Применительно к задачам импульсного управления полученные достаточные условия носят существенно нелокальный характер как по предположениям на класс задач, так и по типу гарантируемого минимума.

Основными теоретическими результатами диссертации являются:

1) достаточные условия в форме принципа максимума для глобального и сильного экстремума в классических задачах управления без априорных предположений нормальности экстремали и единственности соответствующего ей набора множителей Лагранжа (теорема 1.3);

2) обобщение преобразования В.И. Гурмана к производной задаче на случай, когда распределение рецессивных подпространств годографа динамической управляемой системы имеет конечный производный флаг, не превосходящий размерности фазового вектора (теорема 2.2);

3) достаточные условия локального (импульсно-слабого) минимума для импульсных процессов в системах со свойством корректности (теорема 2.3).

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическое значение полученных результатов состоит в расширении классов задач оптимального управления, к которым оказываются применимыми достаточные условия оптимальности, основанные на построении семейств функций типа Ляпунова-Кротова. Их практическая значимость состоит в возможности устанавливать действительное достижение того или иного типа минимума на экстремалях, найденных из условий оптимальности первого порядка. Эффективность достаточных условий продемонстрирована на исследовании ряда нерегулярных прикладных задач экономики и робототехники в гл. 3, 4.

Отдельные разделы диссертации используются в учебном процессе Института математики и экономики (ИМЭ) ИГУ (в рамках курса "Оптимальное управление экономическими системами" и выполнения курсовых и дипломных работ).

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на:

– XI, XII международных Байкальских конференциях "Методы оптимизации и их приложения" (Иркутск, 1998 г., 2001 г.);

– международной конференции "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (Минск, 1998 г.);

– международной конференции "Математика, информатика и управление" (Иркутск, 2000 г.);

– 4-том Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 2000 г.);

– 5-том симпозиуме IFAC "Nonlinear control systems" (Санкт-Петербург, 2001 г.);

– 15-том международном конгрессе IFAC (Барселона, Испания, 2002 г.);

– 10-той Средиземноморской конференции по управлению и автоматике (Лиссабон, Португалия, 2002 г.);

– международной конференции по оптимизации и оптимальному управлению (Улан–Батор, Монголия, 2002 г.);

– международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование" (Улан–Удэ, 2002 г.);

– международном симпозиуме "Обобщенные решения в задачах управления" (Переславль–Залесский, 2002 г.);

– Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения" (Омск, 2003 г.);

– международном конгрессе по моделированию и анализу управляемых динамических систем (Иркутск, 2003 г.);

– на городских семинарах по проблемам оптимизации, динамики и математической экономике, семинарах кафедры методов оптимизации ИМЭ ИГУ и кафедры математики Байкальского государственного университета экономики и права (БГУЭП) (Иркутск, 1998–2003).

Проблематика работы являлась составной частью исследований, выполнявшихся в БГУЭП по грантам РФФИ № 98–01–00837, № 01–01–00869, № 03–01–06107.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[11] (всего вышло из печати 20 публикаций).

Кроме того, часть результатов диссертации нашла свое отражение в монографии [2].

Личный вклад автора состоит в конкретизации канонической теории сильного экстремума применительно к вырожденным и импульсным задачам оптимального управления, а также ее применению к решению ряда прикладных моделей (то же относится и к публикациям, совместным с В.А. Дыхтой).

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы, включающего 169 наименований. Общий объем диссертации составляет 165 страниц,

[2] Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. *Оптимальное импульсное управление с приложениями.* М.: Физматлит, 2000. – 256 с.

включая 11 рисунков.

Краткое содержание работы

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, дается краткий обзор работ по условиям оптимальности импульсных процессов, анонсируются базовые достаточные условия оптимальности, основанные на использовании семейства функций Ляпунова-Кротова.

Первая глава диссертации посвящена достаточным условиям оптимальности в форме, предельно близкой к ПМП, для классических задач оптимального управления. В пп. 1.1–1.3 предварительно критически проанализированы достаточные условия оптимальности такого типа, которые можно получить из принципа Лагранжа и теоремы В.Ф. Кротова, а также ряд известных результатов в этом направлении. В ходе анализа естественным образом были получены новые достаточные условия сильного (и глобального) экстремума, использующие семейство линейных функций Ляпунова-Кротова. В отличии от других известных результатов по обращению ПМ, полученные достаточные условия не требуют нормальности исследуемой экстремали Понтрягина и (или) единственности соответствующего ей нормированного набора множителей Лагранжа.

Рассматривается следующая задача оптимального управления P :

$$J = l_0(b) \to \inf, \quad b := (t_0, x_0 \ ; \ t_1, x_1), \tag{4}$$

$$l(b) \leq 0, \quad k(b) = 0, \tag{5}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u(t) \in U. \tag{6}$$

Здесь $\Delta = [t_0, t_1]$ – нефиксированный отрезок времени, $x_0 = x(t_0)$, $x_1 = x(t_1)$, функции l_0, l, k, f непрерывно дифференцируемы, множество $U \subseteq R^{d(u)}$ произвольно ($d(u)$ означает размерность вектора u).

Процессом управляемой системы (6) будем называть набор $\sigma = (x(t), u(t) \mid t \in \Delta)$, включающий некоторый отрезок времени Δ, абсолютно непрерывную траекторию $x(t)$ и измеримое ограниченное управление $u(t)$, удовлетворяющие на Δ системе (6). Процесс σ назовем *допустимым* в задаче P, если $\Delta = [t_0, t_1]$ и выполнены концевые ограничения (5).

Введем функцию Понтрягина $H(t,x,\psi_x,u) = \langle\psi_x, f(t,x,u)\rangle$, концевую функцию Лагранжа $L(b) = \alpha_0 l_0(b) + \langle\alpha, l(b)\rangle + \langle\beta, k(b)\rangle$ и обозначим через M множество наборов множителей $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(t)) = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi_x(t), \psi_t(t))$, обеспечивающих выполнение ПМП для исследуемого допустимого процесса $\overline{\sigma} = (\overline{x}(t), \overline{u}(t) \mid t \in \overline{\Delta} = [\overline{t}_0, \overline{t}_1])$.

Если $\overline{\sigma}$ – экстремаль Понтрягина и $\lambda \in M$, то тройку функций $\gamma = (\psi(t), \overline{x}(t), \overline{u}(t) \mid t \in \overline{\Delta})$ будем называть *биэкстремалью Понтрягина* (биэкстремалью задачи), а $\psi(t)$ – ее сопряженной компонентой или *коэкстремалью.*

Назовем *биэкстремалью системы (6)* любую тройку функций $\gamma = (\psi(t),\ \overline{x}(t),\ \overline{u}(t))$, определенную на некотором интервале I, и такую, что на I пара $(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ удовлетворяет всем условиям ПМП, за исключением условий трансверсальности. Компоненту $\psi(t) \mid t \in I$ биэкстремали γ назовем сопряженной или коэкстремалью, а компоненту $(\overline{x}(t), \overline{u}(t) \mid t \in I)$ – экстремалью системы. Биэкстремаль называют *тривиальной*, если $\psi(t) \equiv 0$ на I и *нетривиальной* – в противном случае.

Пусть Q – открытое множество в пространстве (t,x), содержащее график траектории $\overline{x}(t)$, и $\gamma = (\psi(t), \overline{\sigma})$ – некоторая биэкстремаль системы, определенная на интервале $I = \mathrm{pr}_t\ Q \supset \overline{\Delta}$. Сформулируем для Q и γ следующие *расширенные условия максимума* понтрягиана и гамильтониана:

Условие $(MH \mid Q,\gamma)$. Почти всюду на I

$$
\begin{aligned}
&H(t,\overline{x}(t),\psi_x(t),\overline{u}(t)) + \dot{\psi}_x(t)\overline{x}(t) = \\
&\qquad = \max\{H(t,x,\psi_x(t),u) + \dot{\psi}_x(t)x \mid x \in Q(t),\ u \in U\}.
\end{aligned}
$$

Условие $(M\mathcal{H} \mid Q,\gamma)$. Почти всюду на I

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\psi_x(t)) + \dot{\psi}_x(t)\overline{x}(t) = \\
&\qquad = \max\{\mathcal{H}(t,x,\psi_x(t)) + \dot{\psi}_x(t)x \mid x \in Q(t)\}
\end{aligned}
$$

и справедливо сопряженное дифференциальное включение

$$
-\dot{\psi}_x(t) \in \partial_x\mathcal{H}(t,\overline{x}(t),\psi_x(t)) \quad \text{на } I, \tag{7}
$$

где частный супердифференциал справа понимается в смысле Кларка.

Пусть $\{\gamma^a \mid a \in \mathcal{A}\}$ – произвольное семейство биэкстремалей (соответствующих $\overline{\sigma}$), каждая из которых удовлетворяет одному из условий максимума $(MH \mid Q, \gamma^a)$ или $(M\mathcal{H} \mid Q, \gamma^a)$. Тогда семейство коэкстремалей $\{\psi^a(t) \mid a \in \mathcal{A}\}$ назовем *порождающим на множестве* Q, поскольку каждая коэкстремаль такого семейства порождает функцию Ляпунова-Кротова на множестве Q, линейную по фазовым переменным:

$$\varphi^a(t,x) = \langle \psi^a_x(t), x - \overline{x}(t) \rangle, \quad a \in \mathcal{A}. \tag{8}$$

С помощью порождающего семейства и функций (8) сформируем следующую конечномерную *концевую задачу* $EP(Q,\mathcal{A})$:

$$l_0(b) \to \min, \quad l(b) \le 0, \quad k(b) = 0,$$
$$\varphi^a(t_1,x_1) - \varphi^a(t_0,x_0) \le 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad b \in Q \times Q.$$

Обозначим через $P(Q)$ сужение задачи P на множество Q, т.е. задача $P(Q)$ получается из P добавлением ограничений

$$(t, x(t)) \in Q, \quad (t_0, x_0 \; ; \; t_1, x_1) \in Q \times Q.$$

Основным результатом главы 1 является

Теорема 1.2. *Пусть для* $\overline{\sigma}$ *существует такое порождающее семейство* $\{\psi^a(t) \mid a \in \mathcal{A}\}$ *на множестве* Q, *что точка* $\overline{b} = (\overline{t}_0, \overline{x}(\overline{t}_0); \overline{t}_1, \overline{x}(\overline{t}_1))$ *является глобальным решением концевой задачи* $EP(Q,\mathcal{A})$.

Тогда $\overline{\sigma}$ *– глобально оптимальный процесс в задаче* $P(Q)$, *реализующий сильный минимум в задаче* P.

Расширенные условия максимума в определении порождающего семейства и в теореме 1.2 могут быть заменены на следующие более жесткие *условия вогнутости* понтрягиана и гамильтониана [1] (в предположении, что все сечения $Q(t)$ выпуклы на интервале I):

Условие $(CH \mid Q, \gamma)$ для задач с выпуклым множеством U. При всех $t \in I$ функция $(x, u) \to H(t, x, \psi_x(t), u)$ вогнута на $Q(t) \times U$.

Условие $(C\mathcal{H} \mid Q, \gamma)$. При $t \in I$ функция $x \to \mathcal{H}(t, x, \psi_x(t))$ вогнута на $Q(t)$ и справедливо сопряженное включение (7).

В п.1.4 рассмотрен ряд примеров, обладающих той или иной аномалией, вызывающей неприменимость стандартных методов Беллмана и Кротова, в которых, тем не менее, предлагаемые достаточные условия срабатывают. В п.1.5 теорема 1.2 детализирована для двухточечной задачи быстродействия.

Во второй главе рассматривается класс вырожденных задач оптимального управления динамической системой вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(t,x) + G(t,x)u = \\ &= f_0(t,x) + \sum_1^{d(u)} g_i(t,x)u_i, \quad U = R^{d(u)} \end{aligned} \tag{9}$$

(функционал и ограничения прежние – вида (4), (5)). Все функции считаются гладкими, а матрица G – достаточно гладкой (например, класса C^∞). Обозначим этот класс задач через P_∞. Естественно рассматривать эту задачу на инфимум, т.е. на множестве последовательностей или, если это оказывается возможным, на некотором расширенном множестве обобщенных решений (в классе импульсных процессов). Показано, что переход к расширенной задаче неизбежен при реализации канонической теории (равно как и для метода Кротова) и связан с преобразованием В.И. Гурмана к производной задаче или нелинейным преобразованием Гоха.

Введем функцию $H_0(t,x,\psi_x) = \langle \psi_x, f_0(t,x) \rangle$. Неравенство Ляпунова–Кротова для системы (9) сводится к соотношениям

$$\mathcal{P}^\varphi(t,x) := \varphi_t + H_0(t,x,\varphi_x) \le 0,$$

$$\langle g_i(t,x), \varphi_x(t,x) \rangle = 0, \quad i = 1,\dots,d(u). \tag{10}$$

Входящая в них система в частных производных (10) носит название системы кратных максимумов, является переопределенной и отнюдь не всегда совместной. Наиболее общее условие ее совместности состоит в том, что она *допускает пополнение*. Это означает следующее.

Рассмотрим функции $g_i(t,x)$ как векторные поля на $R^{d(x)}$, параметрически зависящие от t и порождающие так называемое гладкое распределение подпространств

$$\partial = \partial(t,x) = \mathrm{Lin}\ \left\{ g_1(t,x),\dots,g_{d(u)}(t,x) \right\}.$$

Рассмотрим *производный ряд распределения* ∂ – последовательность распределений $\partial_0 \subset \partial_1 \subset \dots \subset \partial_k \subset \dots$, где $\partial_0 = \partial$, а ∂_k порождается всеми полями вида $[p,q]$ при $p,q \in \partial_{k-1}$, где $[p,q]$ – скобка Ли (коммутатор по x полей p,q).

Будем говорить, что система (10) *допускает пополнение* в области Q пространства (t,x), если:

а) каждое из распределений производного ряда *регулярно* на Q, т.е. имеет постоянную размерность;

б) существует *минимальное инволютивное распределение* ∂_* из производного ряда, которое (по определению) характеризуется свойством $[p,q](t,x) \in \partial_*$ при любых $p,q \in \partial_*$, и такое , что $\dim \partial_*(t,x) = r < d(x)$ на Q.

В частности, систему (10) называют *полной* на Q, если исходное распределение ∂ инволютивно на Q (поля $g_1,\ldots,g_{d(u)}$ инволютивны на Q) и $\operatorname{rank} G(t,x) = \dim \partial(t,x) = r = d(u) < d(x)$ (в этом случае $\partial = \partial_*$).

Оказывается (теоремы 2.1, 2.2), что если система (10) допускает пополнение в области Q, то поиск разрешающего семейства функций Ляпунова-Кротова для задачи $P_\infty(Q)$ эквивалентен нахождению такового для производной задачи В.И. Гурмана, хотя последняя вводится в диссертации при значительно более мягких предположениях по сравнению с обычными. Оптимальное решение производной задачи определяет оптимальный импульсный процесс в соответствующим образом расширенной задаче $\overline{P}_\infty(Q)$.

В п.2.2 результаты п.2.1 детализируются путем соответствующей локализации и применения достаточных условий гл.1 с порождающим семейством коэкстремалей. Однако предположения на задачу усиливаются: считается, что $[g_i,g_j](t,x) = 0 \quad \forall i,j \in \{1,\ldots, \ d(u)\}$ (выполнено условие корректности) и $G = G(x)$ (непринципиальное техническое упрощение). В этих допущениях применение результатов гл. 1 приводит к достаточным условиям импульсно-слабого экстремума для задачи $\overline{P}$ оптимизации импульсных процессов, эквивалентной производной задаче метода нелинейного преобразования Гоха. Допустимые элементы задачи $\overline{P}$ – это наборы $\sigma = (x(t), w(t) \mid t \in \Delta;\ h)$, такие что траектории $x(t) \in L_\infty$ связаны с управлением $w(t) \in L_\infty(\Delta)$ и параметром $h \in R^{d(u)}$ уравнением в обобщенных функциях [3] (распределениях)

$$Dx = f_0(t,x) + G(t,x)Dw^h. \tag{11}$$

Здесь D – оператор обобщенного дифференцирования, а функция $w^h(t) \in L_\infty(R^1)$ определена равенством

$$w^h(t) = \chi_{(t_0,t_1)}u(t) + \chi_{t\geq t_1}h,$$

[3] Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы: модели и приложения.* – М.: Наука, 1991. – 256с.

где χ_E – характеристическая функция множества E.

Тройку функций $\gamma = (\psi(t), \overline{x}(t), \overline{w}(t))$, определенных на некотором интервале I, назовем *слабой биэкстремалью* системы (11) на I, если функция $\psi(t) = (\psi_x(t), \psi_t(t))$ кусочно липшицева на I, удовлетворяет сопряженной системе в распределениях

$$D\psi_x = -H_x[t], \quad D\psi_t = -H_t[t],$$

и справедливы условия стационарности $H_u[t] = 0, \quad \dot{H}_u[t] = 0$ на I (квадратные скобки на месте аргументов указывают на подчет функции вдоль данной биэкстремали).

Определим для биэкстремали γ

Условие $(MH \mid \gamma)_*$. На отрезке $\overline{I} = \mathrm{cl}\, I$

$$\left(\ddot{H}_u\right)_u [t] > 0$$

(обобщенное условие Келли) и существует кусочно липшицевая на I матричная функция $S(t) = S(t;\gamma)$, удовлетворяющая на интервалах непрерывности $\overline{w}(t)$ матричному дифференциальному неравенству Риккати

$$\begin{aligned} -\dot{S} &> H_{x\psi}S + SH_{\psi x} + H_{xx} + \\ &+ \left[\left(\dot{H}_u\right)_x + \left(\dot{H}_u\right)_\psi S\right]^* \left(\ddot{H}_u\right)_u^{-1} \left[\left(\dot{H}_u\right)_x + \left(\dot{H}_u\right)_\psi S\right] \end{aligned} \tag{12}$$

(производные типа $\left(\ddot{H}_u\right)_u = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{\partial H}{\partial u}\right)$ находятся обычным образом и коэффициенты в (12) вычисляются вдоль γ).

Пусть Λ – множество наборов $\lambda = (\alpha_0, \alpha, \beta, \psi(t))$, обеспечивающих выполнение обобщенных условий стационарности [2,3] для импульсного процесса $\overline{\sigma}$, и Ψ – множество коэкстремалей, соответствующих Λ (или $\overline{\sigma}$).

Семейство биэкстремалей $\Gamma = \{\gamma^a \mid a = 1, \ldots, k\}$ назовем *локально порождающим*, если выполнены условия:

а) $\forall a$ биэкстремаль γ^a удовлетворяет условию $(MH|\gamma^a)_*$ на интервале $I \supset \overline{\Delta}$;

б) множество $\Psi_*(\Gamma) = \mathrm{con}\ \Psi(\Gamma) \cap \Psi \neq \emptyset$, где $\Psi(\Gamma)$ – множество коэкстремалей, соответствующих Γ.

в) функция $\overline{w}(t)$ гладкая в окрестности точек $\bar{t}_0$, $\bar{t}_1$.

Фиксируем некоторое локально порождающее семейство Γ, предполагая его существование, и множество $\Lambda_*(\Gamma) \subseteq \Lambda$, соответствующее коэкстремалям из множества $\Psi_*(\Gamma)$, и определим в конечномерном пространстве вариаций концевых параметров $\delta c = (\delta t_0, \delta x_0;\ \delta t_1, \delta x_1, \delta h) = (\delta b, \delta h)$ конус критических вариаций $\mathcal{K}(\Gamma)$, отвечающий концевой задаче типа EP. Для каждого $\lambda \in \Lambda_*(\Gamma)$ введем второй дифференциал $\omega^\lambda(\delta c)$ лагранжиана этой задачи.

Следующая теорема дает достаточные условия *импульсно-слабого минимума, или, иначе,* Π_0*-минимума.*

Теорема 2.3. *Пусть существует такое локально порождающее семейство биэкстремалей* $\Gamma = \{\gamma^a \mid a = 1, \dots, k\}$, *что* $\Lambda_*(\Gamma) \neq \emptyset$ *и*

$$\omega(\delta c) = \max\left\{\omega^\lambda(\delta c) \mid \lambda \in \Lambda_*(\Gamma)\right\} > 0, \quad \forall\, \delta c \in \mathcal{K}(\Gamma) \setminus \{0\}.$$

Тогда $\overline{\sigma}$ *– точка* Π_0*-минимума в задаче* $\overline{P}$.

В п.2.4 каноническая теория распространяется на задачу P_c, которая получается из P_∞ добавлением ограничения на управление $u(t) \in U$, где U – замкнутый выпуклый конус, а также на ее расширение – задачу импульсного управления $\overline{P}_c$, допустимые управления в которой – векторные меры без непрерывной сингулярной составляющей, с конечным числом скачков. Как показывают примеры, для таких задач целесообразно использовать разрывные решения неравенства Ляпунова-Кротова, составленные из его гладких локальных решений, определенных на цилиндрических по t множествах. Описана методика построения таких решений, которая в конечном итоге сводится к поиску разрешающего семейства функций Ляпунова-Кротова из специфического уравнения в частных производных

$$\max\left\{\varphi_t + H_0(t, x, \varphi_x);\ H_{u_j}(t, x, \varphi_x), \quad j = \overline{1, d(u)}\right\} = 0$$

почти всюду по мере Лебега на соответствующем множестве Q. Предложенная методика использована в п.4.2 при решении одной модели из математической экономики (модели Видала-Вулфа).

Третья и четвертая главы посвящены качественному исследованию известных прикладных моделей импульсного управления из робототехники (гл.3) и маркетинга (гл.4), в ходе которого использован весь спектр необходимых и достаточных условий оптимальности (в том числе результаты первых двух глав диссертации).

В моделях оптимального управления движением однозвенного (п.3.1) и двузвенного (пп.3.2, 3.3) манипуляторов установлена глобальная оптимальность найденных импульсных экстремалей. Примечательно, что последняя модель не обладает свойством корректности, но система кратных максимумов допускает пополнение, причем факт оптимальности разрывной траектории устанавливается именно с помощью решения неравенства Ляпунова-Кротова, а уравнение Гамильтона-Якоби оказывается бесполезным.

Типичные импульсные экстремали с траекториями ограниченной вариации в моделях оптимизации рекламных расходов (гл.4) обладают магистральным свойством (имеют интервалы особого управления, составляющие подавляющую часть периода планирования). Для их отыскания использовался обобщенный принцип максимума. Оптимальность экстремали в модели Эрроу-Нерлофа (п.4.1) вытекала из ее нормальности и линейно-выпуклой структуры задачи; в модели Видала-Вулфа (п.4.2) для доказательства оптимальности экстремали потребовалось использование разрывного решения неравенства Ляпунова-Кротова. В наиболее сложной обобщенной модели Видала-Вулфа (п.4.3) анализ ограничен описанием структуры импульсных экстремалей и построением квазиоптимального обычного управления, которое нетривиально из-за нарушения условия корректности (произвольная аппроксимация экстремального импульсного управления может не дать квазиоптимального обычного управления).

Основные публикации по теме диссертации

1. Антипина Н.В., Самсонюк О.Н. *Принцип максимума в задачах оптимального импульсного управления и его приложение в моделях маркетинга* // Сборник трудов международной конференции "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация", Институт математики Национальной академии наук Белоруссии. – Минск, 1998. – Т.2. – С.32–34.

2. Антипина Н.В., Дыхта В.А. *Динамические системы с разрывными траекториями и импульсами в моделях экономики* // Труды XI Байкальской международной конференции "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск, 1998. – Т.3. – С.24–26.

3. Дыхта В.А., Антипина Н.В. *Application of Variational Maximum principle to optimization models with discontinuous trajectories* // Proc. of 5th Symposium "Nonlinear control systems"(NOLCOS-2001). – Saint-Petersburg, Russia, 2001. – pp.614–618.

4. Антипина Н.В. *Достаточные условия глобальной оптимальности импульсных процессов* // Труды XII Байкальской международной конференции "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск, 2001. – Т.2. – С.35–39.

5. Антипина Н.В., Соболева О.Р., Багдуева А.В. *Оптимизация инвестиций в некоторых экономических моделях* // Труды XII Байкальской международной конференции "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск, 2001. – Т.6. – С.98–103.

6. Dykhta V.A., Antipina N.V. *Sufficient optimality conditions for classical and impulsive optimal control problems* // Proc. of 10th IEEE Mediterranean Conf. on Control and Automation (MED 2002). – THP 3 (invited) VA–1. – Instituto Superior Técnico, Lisbon, Portugal, 2002. – 10p.

7. Dykhta V., Antipina N. *Investigation of impulsive extremals in applied models of dynamic optimization* // Prepr. of the 15th Triennial World Congress of the IFAC, (b'02). – T-Tu-E 17 5. – Barcelona, Spain, 2002. – 5p.

8. Антипина Н.В., Дыхта В.А. *Элементарное доказательство принципа максимума для гладкой задачи оптимального импульсного управления с нефиксированным временем* // Оптимизация, управление, интеллект. – Журн. Всероссийской ассоциации мат. программирования и АНН. – Иркутск, 2002. – N6. – С.21–36.

9. Дыхта В.А., Антипина Н.В. *Достаточные условия оптимальности обобщенных траекторий в задачах с линейным неограниченным управлением* // Труды международной конференции "Математика, ее приложения и математическое образование". – Улан-Удэ, 2002. – Часть 1. – С. 177–185.

10. Антипина Н.В., Дыхта В.А. *Линейные функции Ляпунова–Кротова и достаточные условия оптимальности в форме принципа максимума.* // Изв.Вузов. Математика. – 2002. – N12.– С. 11–21.

11. Dykhta V.A., Antipina N.V. *Sufficient optimality conditions for classical and hybrid optimal control problems* // Proc. of IFAC Workshop "Modelling and Analysis of Logic Controlled Dynamic Systems". – Irkutsk, Baikal, Russia, 2003. – pp. 53–60.

Автореферат

ИД 06318 от 26.11.01.
Подписано в печать 1.08.03.
Формат бумаги 60×90 1/16.
Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Уч.печ.л. 1,25. Уч.-изд.л. 1,12.
Тираж 100 экз. Заказ 2574.

Издательство Байкальского государственного
университета экономики и права,
664015, Иркутск, ул. Ленина, 11.
Отпечатано в ИПО БГУЭП.