На правах рукописи

Глазкова Мария Юрьевна

О замкнутости многопараметрического операторного пучка

Специальность 01.01.01 –

– математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

ВОРОНЕЖ – 2003

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Азизов Томас Яковлевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Баскаков Анатолий Григорьевич

доктор физико-математических наук, профессор Чернышов Корнелий Исидорович

Ведущая организация: механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Защита состоится « 8 » апреля 2003 г. в 15 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета К 212.038.05 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Воронежском государственном университете по адресу 394693, Воронеж, Университетская пл., 1, ВГУ, математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан «6» марта 2003 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Гликлих Ю.Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Проблеме исследования замкнутости операторов, оператор-функций уделяется большое внимание в научной литературе. Впервые этот вопрос возник при исследовании класса интегродифференциальных операторных уравнений в гильбертовом пространстве, порожденных начально-краевой и спектральной задачами о малых движениях вязкоупругой жидкости в полностью заполненном контейнере. Одной из моделей таких жидкостей является модель Олдройда, которая при $m = 1$ исследовалась в работах А.И.Милославского :

$$\frac{du}{dt} + Au + \int_0^t e^{-\mu(t-s)} Bu(s)ds = f(t), \qquad u(0) = u_0,$$

где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $u : [0,\infty) \to \mathcal{H}$,$f : [0,\infty) \to \mathcal{H}$, μ — положительное число, $u_0 \in \mathcal{H}$, и A и B — самосопряженные равномерно положительные операторы на $\mathcal{H}$ с одинаковыми областями определения:

$$A = A^* >> 0, \quad B = B^* >> 0,$$

$$\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} B.$$

В работе Т.Я.Азизова, Н.Д.Копачевского, Л.Д.Орловой доказано,что она имеет единственное сильное решение при обычных условиях на f. Эту задачу можно привести к стандартному виду линейной дифференциальной задачи в пространстве $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Тогда возникает вопрос о замкнутости операторной матрицы. Подобные задачи были исследованы в работах H.Langer, В.М.Адамяна.

R.Mennicken, J.Sauer, Chr.Tretter, S.Alberio, J.Brasche, H.Neidhardt, А.А.Шкаликова и др. В нашей работе рассматривается операторный пучок

$$L_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j A_j, \ A_j = A_j^* >> 0, \ \mathrm{dom}\, A_0 \subset \mathrm{dom}\, A_j, \ j = \overline{0,n},$$

связанный с задачей Коши ($\lambda_j = 1/\mu_j$, $j = \overline{1,n}$)

$$\frac{du}{dt} + A_0 u + \int_0^t \sum_{j=1}^{n} e^{-\mu_j(t-s)} A_j u(s) ds = f(t), \qquad u(0) = u_0.$$

Найдено достаточное условие замкнутости этого операторного пучка, которое основывается на понятии "косинуса угла между операторами". Впервые это понятие было введено и исследовано П.Е.Соболевским. Достаточно полная теория построена K.Gustafson.

Понятие замкнутости играет важную роль в теории возмущений и расширений линейных операторов. Теория возмущений линейных операторов представляет собой набор довольно разнообразных результатов по спектральной теории линейных операторов. Со времени ее создания Рэлеем и Шредингером эта теория заняла важное место в прикладной математике. Этому направлению посвящено много научных трудов, см., например, монографии и статьи Т.Като, М.Г.Крейна, М.А.Красносельского, Д.П.Мильмана, А.А.Нудельмана и др. Теория возмущений исследуется, например, в работах В.Д.Кошманенко, Т.Каратаевой, S.Alberio, W.Karwowski, а также H.Neidhardt, J.Brasche, J.Weidman и др.

Мы предлагаем, как нам кажется, новый подход к исследованию этой задачи в случае гильбертова пространства и распространяем его на случай пространства Понтрягина.

Работа выполнялась в рамках исследований по грантам РФФИ 99-01-00391, 02-01-00353 и 01-01-06106 МАС и совместно нидерландско-российскому гранту NWO 047-008-008.

Цель работы. Исследование вопроса о замкнутости многопараметрических операторных пучков; проблемы возмущения самосопряженных операторов. Обобщение результатов на случай пространства Понтрягина.

Методика исследования. Методика исследования основана на теории операторов в гильбертовых пространствах и пространствах с индефинитной метрикой.

Научная новизна. Основные результаты являются новыми. Среди них отметим следующие:

1. Получено достаточное условие самосопряженности многопараметрического операторного пучка.
2. В случае аккретивности операторных коэффициентов исследован вопрос о максимальной аккретивности операторного пучка $L_n(\lambda)$.
3. Представлены новые результаты для "косинуса угла между операторами".
4. Дан новый подход в исследовании вопроса о сингулярном возмущении самосопряженного оператора в пространстве Понтря-

гина Π_κ.

Практическая и теоретическая значимость. Все результаты работы носят теоретический характер.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[6]. Работа [1] выполнена совместно с Azizov T.Ya., Dijksma A., Forster K.-H. Постановка задач принадлежит Азизову Т.Я., Dijksma A., Forster K.-H., реализация – автора. Они докладывались на воронежских весенних и зимней математических школах "Современные методы в теории краевых задач" в 2000-2002 г.г., на семинарах проф. Т.Я.Азизова (1999-2002 г.г.), на международной математической конференции (г. Киев), на Крымской математической школе-симпозиуме в 2001 г., на семинаре проф. A.Dijksma (Гронинген, Нидерланды) в 2002 г.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, двух глав и списка используемой литературы. Объем диссертации 84 страницы. Библиография содержит 46 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1 исследуется вопрос о замкнутости многопараметрического операторного пучка.

Приведены примеры самосопряженных, равномерно положительных операторов A и B с одинаковыми областями определения таких, что $L(\lambda) = A + \lambda B$ не всегда самосопряженный оператор (§2).

В §3 рассматривается операторный пучок с $n+1$ операторами и $\lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \{1\} \times \mathbf{R}_+^n$, где $\mathbf{R}_+ = [0.\infty)$. Например, операторный пучок

$$L_n(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j A_j, \;\; A_j = A_j^* >> 0, \;\; \operatorname{dom} A_0 \subset \operatorname{dom} A_j, \;\; j = \overline{0,n}, \quad (1)$$

связанный с задачей Коши ($\lambda_j = 1/\mu_j$, $j = \overline{1,n}$)

$$\frac{du}{dt} + A_0 u + \int_0^t \sum_{j=1}^{n} e^{-\mu_j (t-s)} A_j u(s) ds = f(t), \qquad u(0) = u_0. \quad (2)$$

С этим пучком ассоциируем $(n+1)\times(n+1)$ матрицу $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})_{i,j=0}^n$, где

$$\alpha_{ij} = \cos(A_i, A_j) = \inf\{\frac{\operatorname{Re}(A_i x, A_j x)}{\|A_i x\| \, \|A_j x\|} \mid x \in \operatorname{dom} A_0, A_i x \neq 0, A_j x \neq 0\}.$$

Символом $\mathbf{E}$ будем обозначать множество комплексных чисел $\mathbf{C}$ или множество вещественных чисел $\mathbf{R}$. Обозначим $\mathbf{E}^m$ — m—мерное гильбертово пространство с евклидовым скалярным произведением, а $\mathbf{E}_+^m$ — конус неотрицательных векторов $u = \{\xi_1, \dots, \xi_m\} \in \mathbf{E}^m$, где $\xi_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$.

Будем говорить, что $m \times m$ матрица $\mathcal{A}$ конусно равномерно положительная в $\mathbf{E}^m$, если существует положительное число $k_{\mathcal{A}}$ такое, что

$$(Au, u) \geq k_A(u, u), \ u \in \mathbf{E}^m_+.$$

Пучок (1) будет самосопряженным для всех $\lambda \in \{1\} \times \mathbf{R}^n_+$ тогда и только тогда, когда он замкнут для всех $\lambda \in \{1\} \times \mathbf{R}^n_+$ и достаточным условием этого является конусно равномерная положительность $(n+1) \times (n+1)$ матрицы $\mathcal{A} = (\cos(A_i, A_j))$. Основным результатом является следующая

Теорема 1.1 *Пусть операторные коэффициенты пучка $L_n(\lambda)$ таковы: A_0 — максимальный (равномерно) аккретивный, операторы A_j, $j = \overline{1,n}$, аккретивные. Если матрица $\mathcal{A}$, ассоциируемая с $L_n(\lambda)$, конусно равномерно положительная, то $L_n(\lambda)$ — максимальный (равномерно) аккретивный оператор для всех $\lambda \in \{1\} \times \mathbf{R}^n_+$.*

Отсюда вытекает

Следствие 1.1 *Пусть операторный коэффициент A_0 — самосопряженный оператор, а операторы A_j, $j = \overline{1,n}$, симметрические. Тогда $L_n(\lambda)$ самосопряженный оператор для всех $\lambda \in \{1\} \times \mathbf{R}^n_+$ тогда и только тогда, когда он замкнут для всех $\lambda \in \{1\} \times \mathbf{R}^n_+$. Достаточным условием этого является конусно равномерная положительность матрицы $\mathcal{A}$,ассоциируемой с $L_n(\lambda)$.*

В завершение рассматривается случай $n = 1$, то есть операторный пучок вида $L_1(\lambda) = A + \lambda B$. В этом случае была сформулирована и доказана

Теорема 1.2 *Пусть A и B — аккретивные (симметрические) опе-*

раторы такие, что $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} B$.

(1) *Если* A *— максимальный аккретивный (самосопряженный) оператор и* $\cos(A, B) > -1$, *то* $A+\lambda B$ *— максимальный аккретивный (самосопряженный) оператор для всех* $\lambda \geq 0$.

(2) *Если* A *и* B *— максимальные равномерно аккретивные (равномерно положительные самомопряженные) операторы и* $\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} B$, *то* $A + \lambda B$ *— максимальный равномерно аккретивный (равномерно положительный самосопряженный) оператор для всех* $\lambda \geq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\cos(A, B) > -1$..

Первая часть теоремы 2 для $\cos(A, B) \geq 0$ была доказана Н.Оказава. К. Густафсон вместо условия $\cos(A, B) > -1$ рассмотрел следующее условие: для некоторых $a, b \in \mathbf{R}$, $b < 1$,

$$\operatorname{Re}(Ax, Bx) \geq -a\|x\|^2 - b\|Ax\|\|Bx\|, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Для замкнутых операторов A и B, таких что $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} B$ нормы

$$\|x\|^2 + \|Ax\|^2 + \|\lambda Bx\|^2, \quad \delta\|x\|^2 + \|(Ax + \lambda Bx)\|^2$$

эквивалентны при $\delta > \max(0, a)$, и следовательно, $A+\lambda B$ — замкнутый оператор для всех $\lambda \geq 0$. Во второй части теоремы, условие Густафсона эквивалентно условию $\cos(A, B) > -1$, по крайней мере, когда A и B — максимальные равномерно аккретивные (равномерно положительные самосопряженные) операторы с одинаковыми областями определения $\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} B$. Теорема 2(2) неверна, если условие $\operatorname{dom} A = \operatorname{dom} B$ заменить на $\operatorname{dom} A \subset \operatorname{dom} B$. В работе приводится пример, подтвержающий это.

В §4 исследуется задача о конусно равномерной положительности квадратных матриц. Сформулирована и доказана

Теорема 1.3 *Пусть A — самосопряженная $m \times m$ матрица и пусть*

$$P_A^0 = \{u \in \mathbf{E}^m : (Au, u) = 0\}.$$

Тогда матрица A конусно равномерно положительная тогда и только тогда, когда $P_A^0 \cap \mathbf{E}_+^m = \{0\}$ и существует вектор $u_0 \in \mathbf{E}_+^m = \{0\}$ такой, что $(Au, u) > 0$.

Это утверждение было использовано при доказательстве следующего факта:

Следствие 1.6 *Пусть операторные коэффициенты A_j пучка $L_n(\lambda)$ — самосопряженные, ограниченные снизу операторы. Положим $A_j = B_j + C_j$, где B_j — самосопряженные, а C_j — ограниченные самосопряженные операторы. Пусть резольвенты операторов B_j коммутируют , $j = \overline{0, n}$. Тогда $L_n(\lambda)$ — самосопряженный оператор для всех $\lambda \in \{1\} \times \mathbf{R}_+^n$.*

В §§5,6 представлены новые результаты для косинуса "угла"между операторами А и В:

Теорема 1.6 *Для каждой тройки a_{01}, a_{02} и a_{12} чисел из интервала $(-1, 0]$ существуют самосопряженные и равномерно положительные операторы A_0, A_1 и A_2, действующие в $\mathcal{H}$ $(\dim \mathcal{H} \geq 6)$ и имеющие одинаковые области определения такие, что $\cos(A_0, A_1) = a_{01}$, $\cos(A_0, A_2) = a_{02}$ и $\cos(A_1, A_2) = a_{12}$.*

А также приводятся иные доказательства для некоторых известных фактов:

Теорема 1.7 *Пусть $A \neq 0$ — ограниченный самосопряженный опе-*

ратор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Если

$$m := \min\{\lambda|\lambda \in \sigma(A)\}, \quad M := \max\{\lambda|\lambda \in \sigma(A)\},$$

то имеют место следующие утверждения:

(1) $m < 0 \Rightarrow \cos(A) = -1$,

(2) $m \geq 0 \Rightarrow \cos(A) = 2\sqrt{mM}/(m+M)$.

Теорема 1.8 *Пусть A — аккретивный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

(i) *Если A — неограниченный оператор, то* $\cos(A) = 0$.

(ii) *Если A — ограниченный оператор,то*

$$\cos(A) \leq 2\sqrt{mM}/(m+M), \tag{3}$$

где $m = \inf\{\operatorname{Re}(Ax,x) : \|x\| = 1\}$ *и* $M = \sup\{|(Ay,y)| : \|y\| = 1\}$.

В §7 рассматривается замкнутость некоторых операторных матриц. Основным результатом является

Теорема 1.9 *Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ортогональное разложение гильбертова пространства $\mathcal{H}$, пусть $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — неограниченный самосопряженный равномерно положительный оператор, пусть $B : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ — допускающий замыкание плотно заданный неограниченный оператор и* $\operatorname{dom} B^* \supset \operatorname{dom} A^{1/2}$, *и пусть $C : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ ограниченный равномерно положительный оператор. Тогда операторная матрица*

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ -B^* & C \end{bmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \tag{4}$$

незамкнутая максимальная в существенном равномерно аккретивная.

Глава 2 посвящена исследованию сингулярных возмущений самосопряженного оператора.

В пункте 2.1 рассматриваем случай гильбертова пространства. Основными результатами являются следующие утверждения:

Теорема 2.1 *Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, A — неограниченный ограничено обратимый оператор в $\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство $\mathcal{H}$, $B : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — ограниченный симметрический оператор, такой что область значений оператора$(I - PA^{-1}B)$* $\operatorname{ran}(I - PA^{-1}B)$ *замкнута. Здесь оператор P — ортопроектор на $\mathcal{L}$.*

Тогда следующие предположения эквивалентны:

(i) существует самосопряженный оператор $\widetilde{A}$, такой что $\mathcal{L} \subset \operatorname{dom}\widetilde{A}$, $\widetilde{A}|_{\mathcal{L}} = B$ и область определения оператора $A' := A \cap \widetilde{A}$ плотна в $\mathcal{H}$;

(ii) множество $\mathcal{D} := \{f \in \operatorname{dom} A : (Bx, f) = (x, Af).\ x \in \mathcal{L}\}$ плотно в $\mathcal{H}$;

(iii) $\overline{\operatorname{ran}(I - A^{-1}B)} \cap \operatorname{dom} A \subset \operatorname{ran}(I - A^{-1}B)$, и $Bx = Ax$ для $x \in \mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A$.

Если выполнено (ii)-(iii), то каждое расширение $\widetilde{A}$ оператора $\widetilde{A}_1$, такого что $\operatorname{dom}\widetilde{A}_1 = \mathcal{L} + \mathcal{D}$ и $\widetilde{A}_1(x + f) = Bx + Af$, где $x \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{D}$ соответственно, искомое.

Теорема 2.2 *Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — подпространство $\mathcal{H}$. Если $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — неограни-*

ченный самосопряженный оператор, $B : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — самосопряженный оператор и $\sigma(B_1) \cap \sigma(A) = \emptyset$, то существует самосопряженный оператор $\widetilde{A}$ такой, что $A \cap \widetilde{A}$ плотно определен и $\widetilde{A}|_{\widetilde{E}(\sigma B_1)\mathcal{H}}$ изометрически подобен оператору B_1; здесь $\widetilde{E}$ — спектральная функция оператора $\widetilde{A}$.

В этом пункте приводится пример пары операторов $\{A, B\}$ таких, что $\operatorname{dom} A \cap \mathcal{L} = \{0\}$, но множество

$$\mathcal{D} := \{f \in \operatorname{dom} A : (Bx, f) = (x, Af),\ x \in \mathcal{L}\}$$

не плотно.

В §2 обобщаются результаты, полученные в §1, на случай пространства Понтрягина:

Теорема 2.3 *Пусть Π_κ — пространство Понтрягина, A — самосопряженный, неограниченный ограничено обратимый оператор в Π_κ. Пусть $\mathcal{L}$ — подпространство Π_κ, $\dim \mathcal{L} < \infty$, $B : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — ограниченный симметрический оператор.*

Тогда следующие предположения эквивалентны:

(i) существует самосопряженный оператор $\widetilde{A}$, такой что $\mathcal{L} \subset \operatorname{dom} \widetilde{A}$, $\widetilde{A}|_{\mathcal{L}} = B$ и область определения оператора $A' := A \cap \widetilde{A}$ плотна в $\mathcal{H}$;

(ii) множество $\mathcal{D} := \{f \in \operatorname{dom} A : [Bx, f] = [x, Af],\ x \in \mathcal{L}\}$ плотно в Π_κ;

Если выполнено (ii), то каждое расширение $\widetilde{A}$ оператора $\widetilde{A}_1$, такого что $\operatorname{dom} \widetilde{A}_1 = \mathcal{L} + \mathcal{D}$ и $\widetilde{A}_1(x + f) = Bx + Af$, где $x \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{D}$ соответственно, искомое.

Для доказательства этого факта мы использовали следующую лемму:

Лемма 2.2 *Пусть* Π_κ *— пространство Понтрягина,* A *— неограниченный замкнутый оператор.* $\mathcal{L}$ *— подпространство* Π_κ*,* $\dim \mathcal{L} < \infty$ *и* $\mathcal{L} \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$*. Тогда существует невырожденное подпространство* $\mathcal{M}$ *такое, что* $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$ *и* $\mathcal{M} \cap \operatorname{dom} A = \{0\}$.

В заключение, я хочу выразить глубокую признательность своему научному руководителю Т.Я. Азизову за оказанное внимание к работе. А также проф. A. Dijksma и всем участникам семинара за ценные замечания.

Публикации по теме диссертации.

[1] Azizov T.Ya. On the closedness of operator pencils./ Azizov T.Ya., Dijksma A., Forster K.-H., Glazko-va M.Yu.// Indiana University Mathematics Journal - V. 49, № 1 - 2000 - P. 31-59.

[2] Глазкова М.Ю. Конусно равномерная положительность./Глазкова М.Ю. // Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения-X: Тез. докл. - Воронеж, 2000 - С. 40.

[3] Глазкова М.Ю. Критерий замкнутости многопараметрического пучка./Глазкова М.Ю. // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Понтрягинские чтения-XI: Тез. докл. - Воронеж, 2001 - С. 93-94.

[4] Глазкова М.Ю. Критерий замкнутости многопараметрического пучка./Глазкова М.Ю. // Сб. трудов математического факультета ВГУ – Воронеж, 2001 – С. 26–30.

[5] Glazkova M.Yu. On the uniform cone operators./Glazkova M.Yu. // Тез. докл. международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения И.Г.Петровского – М., 2001 –
С. 148–149.

[6] Glazkova M.Yu. A criteria of the closedness of linear pencil./Glazkova M.Yu. // Тез. докл. международной математической конференции по функциональному анализу – Киев, 2001 – С. 30–31.

Заказ №94 от 27.02.2003 г. Тираж 100 экз. Лаборатория оперативной полиграфии ВГУ