

Мордовский государственный университет им.Н.П.Огарева

На правах рукописи

УДК 532.133

Петухова Ольга Анатольевна

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ЧАСТИЦ, ПОКРЫТЫХ ЖИДКОЙ  
ОБОЛОЧКОЙ, В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ**

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

диссертации на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Саранск - 2002

Работа выполнена на кафедре математики и теоретической механики  
Мордовского государственного университета им.Н.П.Огарева

Научный руководитель - доктор физико-математических наук  
Мартынов С.И.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор Малыханов Ю.Б.  
кандидат физико-математических наук,  
доцент Смолкин Г.А.

Ведущая организация – Самарский государственный университет

Защита состоится 23 октября 2002 года в 14 часов 00 мин. на за-  
седании диссертационного совета по защите докторских диссертаций  
ДМ.212.117.07 при Мордовском государственном университете имени  
Н.П.Огарева по адресу:  
430000, г.Саранск, ул.Большевикская, 68.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Мордовского  
государственного университета имени Н.П.Огарева.

Автореферат разослан « 14 » сентября 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного  
совета доктор физико-математических  
наук, профессор



А.М. Зюзин

2002-A  
18778

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы исследования.

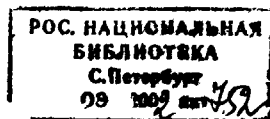
Актуальность моделирования дисперсных сред связана как с использованием таких сред в различных технологиях, например, нефтяной, химической, медицине, строительстве, так и с широким распространением таких сред в природных явлениях. Примером взаимодействия сложных частиц в оболочке, движущихся в потоке жидкости, является цементный раствор: твердые частицы цемента, помещенные в жидкость, взаимодействуют с ней. Это приводит к образованию частицы, состоящей из твердого ядра и слоя жидкости, механические свойства которой отличны от свойств несущей жидкости. Моделирование таких дисперсных сред – очень сложная задача, так как поведение частиц, помещенных в жидкость, зависит от того, как движутся остальные. Особое значение имеет изучение гидродинамического взаимодействия частиц. Несмотря на интенсивное развитие методов численного моделирования гидродинамического взаимодействия частиц в потоке жидкости, по-прежнему актуально получение аналитических результатов в этой области, что очень важно для понимания фундаментальных процессов, происходящих в таких средах, и служит основой для развития численных методов. В работе исследование взаимодействия частиц проводилось аналитическими и численными методами.

### Цель и задачи исследования.

Целью работы является математическое моделирование гидродинамического взаимодействия двух частиц, покрытых жидкой оболочкой, в сдвиговом потоке и изучение влияния этого взаимодействия на движение самих частиц. В соответствии с поставленной целью в работе решаются следующие задачи:

- 1) разработка математической модели, учитывающей гидродинамическое взаимодействие частиц;
- 2) получение на основе разработанной модели аналитических выражений для сил, действующих на частицы, и скоростей, приобретаемых ими в результате гидродинамического взаимодействия;
- 3) изучение влияния гидродинамического взаимодействия на осаждение частиц в линейном и параболическом потоке.

Методы исследования базируются на методах моделирования физических процессов, аналитические и численные методы решения уравнений математической физики.



### Научная новизна.

1. Предложена математическая модель, описывающая гидродинамическое взаимодействие двух твердых частиц, покрытых жидкой оболочкой в сдвиговом потоке вязкой несжимаемой жидкости.

2. На основе полученной математической модели решены: задача о взаимодействии «вмороженных» в поток частиц, осесимметричная и асимметричная задачи движения двух частиц.

3. В рамках модели получены выражения для сил, действующих на частицы, и скоростей частиц, приобретаемых ими в результате гидродинамического взаимодействия.

4. Изучено влияние гидродинамического взаимодействия на осаждение частиц в линейном и параболическом потоке.

5. Показано, что гидродинамическое взаимодействие может служить причиной образования структур в дисперсных системах.

Достоверность полученных результатов подтверждается математическими методами исследования, а также непротиворечием полученных результатов с известными теоретическими и экспериментальными данными, полученными для частных случаев.

### Практическая значимость результатов исследований.

Результаты работы заключаются в создании математической модели, описывающей поведение двух твердых частиц, покрытых жидкой оболочкой, в сдвиговом потоке вязкой несжимаемой жидкости с учетом гидродинамического взаимодействия.

Такого рода модель может быть использована при расчете различных процессов в сложных дисперсных системах для течений с различным профилем скорости.

### Основные положения, выносимые на защиту:

- математическая модель гидродинамического взаимодействия двух частиц с жидкой оболочкой, помещенных в линейный поток жидкости;
- результаты расчета сил, действующих на частицы, и скоростей, приобретаемых ими в результате взаимодействия;
- результаты исследования влияния жидкой оболочки на скорость осаждения частиц;

- результаты исследования влияния ориентации потока вязкой жидкости относительно направления силы тяжести на образование структур в параболическом потоке.

#### Апробация работы.

Основные положения и результаты диссертационной работы обсуждались на 5-й Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», на научном семинаре Средневолжского математического общества под руководством профессора Е.В.Воскресенского в Мордовском государственном университете имени Н.П.Огарева (Саранск, 2001-2002гг.), на научном семинаре кафедры математики и информатики Няганского филиала Тюменского государственного университета (Нягань, 2000-2002гг.).

Личный вклад автора в получение результатов, изложенных в диссертации: обоснование задач диссертации, постановка основных положений разработаны совместно с доктором физико-математических наук С.И.Мартыновым.

Вывод аналитических выражений, проведение численных расчетов, анализ результатов выполнены автором самостоятельно.

#### Публикации.

По теме диссертации опубликованы 4 научные работы, список которых приведен в конце автореферата.

#### Структура и объем диссертации.

Диссертационная работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка используемых источников, включающего 104 работы отечественных и зарубежных авторов. Работа изложена на 102 листах машинописного текста, содержит 25 рисунков.

#### Содержание работы.

Введение содержит обоснование актуальности темы диссертации, обзор литературы, содержащей теоретические и экспериментальные результаты по теме исследования, формулируются цели и задачи исследования, приведена структура диссертации.

В первом разделе диссертации рассмотрена математическая модель, описывающая взаимодействие двух частиц, окруженных жидкой оболочкой, в потоке вязкой жидкости.

Задача о взаимодействии двух частиц является основополагающей в силу линейности уравнений и граничных условий, описывающих движение жидкости при малых числах Рейнольдса.

В вязкую несжимаемую жидкость вязкости  $\eta_1$  (область 1) помещены две твердые сферические частицы радиуса  $b$ , окруженные слоем другой несжимаемой жидкости вязкости  $\eta_d$  (область 2); жидкая оболочка имеет сферическую форму радиуса  $a$ . Твердые частицы в оболочке, обозначаемые  $A$  и  $B$ , помещены в линейный поток жидкости

$$U_i = E_{ij}x_j + \Omega_{ij}x_j,$$

где  $E_{ij}$  и  $\Omega_{ij}$  – симметричный и антисимметричный тензоры, определяемые таким образом:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Положение произвольной точки жидкости относительно центров сфер  $A$  и  $B$  обозначаются векторами  $\vec{X}_A$  и  $\vec{X}_B$  соответственно. Для введенных векторов имеем соотношение  $\vec{X}_B = \vec{X}_A - \vec{r}$ , где вектор  $\vec{r}$  соединяет центры сфер  $A$  и  $B$ . В результате взаимодействия частицы приобретают скорости  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$ .

Уравнения движения жидкости в областях 1 и 2 в приближении Стокса:

$$\begin{aligned} \nabla \vec{v}_1 &= 0, & \eta_1 \Delta \vec{v}_1 &= \nabla p_1, \\ \nabla \vec{v}_2 &= 0, & \eta_d \Delta \vec{v}_2 &= \nabla p_2. \end{aligned}$$

Везде рассматривается стационарный случай ламинарного потока жидкости.

Рассмотрим граничные условия:

$$v_{ir}^A = 0, \quad |\vec{X}_A| = a$$

(условие непротекания жидкости из области 1 в область 2);

$$v_{ir} + U_i(A) + E_{ij}X_{Aj} = v_{2i}^A \quad (1)$$

(условие равенства скоростей жидкостей на границе областей 1-2);

$$\eta_1 \left( \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{1j}}{\partial x_i} \right) n_j^A \tau_i^A = \eta_d \left( \frac{\partial v_{2i}^A}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{2j}^A}{\partial x_i} \right) n_j^A \tau_i^A, \quad |\bar{X}_A| = a$$

(условие равенства касательных напряжений на поверхности жидкой частицы);

$$v_{1i} \rightarrow U_i, \quad |\bar{X}| \rightarrow \infty$$

$$p_1 \rightarrow 0, \quad |\bar{X}| \rightarrow \infty$$

(условие затухания возмущений, вызванных присутствием частиц в жидкости);

$$v_{2i}^A = U_i^A + w_y^A X_{Ay}, \quad |\bar{X}_A| = b.$$

(условие равенства скоростей на границе жидкость – твердое тело).

Здесь введены обозначения:

$\bar{v}_1$  – скорость жидкости в области 1,

$\bar{v}_2$  – скорость жидкости в области 2,

$\bar{n}^A, \bar{\tau}^A$  – единичные векторы нормали и касательной к поверхности жидкой оболочки частицы  $A$ ,

$\bar{U}^A$  – скорость поступательного движения твердой частицы относительно жидкости 1,

$w_y^A$  – тензор угловой скорости твердой частицы относительно жидкости 1,

$U_i(A)$  – значение скорости  $U_y = E_y X_j + \Omega_{yj} X_j$  в точке, занимаемой центром сферы  $A$  при  $|\bar{X}_A| = a$ :  $U_i(A) = E_y r_j^A + \Omega_{yj} r_j^A$ .

Аналогичные граничные условия записываются для частицы  $B$ .

Считаем, что поверхность не деформируется, так как коэффициент поверхностного натяжения достаточно большой.

В задаче рассматриваются две частицы, значит решение должно зависеть от расстояний до центров двух сфер. Выражение для давления в должно содержать мультиполи двух типов: с частными производными от функций  $\frac{1}{X_A}$  и

$\frac{1}{X_B}$ . Поэтому выражение для давления в области 1 записывается таким образом:

зом:

$$p_1 = H_i^{(1)}(L_i^A - L_i^B) + F_{ij}^{(1)}(L_j^A + L_j^B) + G_{ijk}^{(1)}(L_{jk}^A - L_{jk}^B) + D_{ijke}^{(1)}(L_{jke}^A + L_{jke}^B) + \dots$$

(для одинаковых частиц).

Здесь  $H_i$ ,  $F_{ij}$ ,  $G_{ijk}$  – неизвестные тензорные коэффициенты,  $L_{ijk}$  – мультиполь, вычисляемый по правилу

$$L_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{1}{X} \right) \dots \right) \right) \right),$$

где  $X$  – расстояние от центра системы координат наблюдателя до точки в жидкости, где берется значение давления;  $\frac{1}{X}$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве,  $A$  и  $B$  означают мультиполи, содержащие частные производные от функций  $\frac{1}{X_A}$  и  $\frac{1}{X_B}$  соответственно.

Можно записать бесконечно много членов в этом выражении для давления по правилу: сумма мультиполей четного порядка и разность мультиполей нечетного порядка дают симметричную функцию.

Зная распределение давления, можно записать выражение для функции скорости:

$$\begin{aligned} \eta_i v_{li} = & U_i \cdot T_1 - \frac{2}{3} H_i^{(1)}(L_0^A - L_0^B) - \frac{3}{5} F_{ij}^{(1)}(L_j^A + L_j^B) - \frac{4}{7} G_{ijk}^{(1)}(L_{jk}^A - L_{jk}^B) - \\ & - \frac{5}{9} D_{ijke}^{(1)}(L_{jke}^A + L_{jke}^B) - \dots - \frac{1}{6} H_j^{(1)}(L_{ij}^A X_A^2 - L_{ij}^B X_B^2) - \frac{1}{10} F_{jk}^{(1)}(L_{ijk}^A X_A^2 + L_{ijk}^B X_B^2) - \\ & - \frac{1}{14} G_{jke}^{(1)}(L_{jke}^A X_A^2 - L_{jke}^B X_B^2) - \frac{1}{18} D_{jken}^{(1)} \cdot (L_{jken}^A X_A^2 + L_{jken}^B X_B^2) - \dots \end{aligned}$$



Здесь  $\vec{U}$  – скорость невозмущенного потока жидкости, далее следуют слагаемые с возмущением. На бесконечности эти слагаемые равны нулю, значит, граничные условия выполняются.

Чтобы построить решение в области 2, заметим следующее: решение должно содержать слагаемые не только убывающие, но и возрастающие с расстоянием. То есть в области 2 можно переписать решение с другими индексами и добавить слагаемые с возрастающими функциями. Добавочные слагаемые должны быть сконструированы так, что если размер твердой частицы  $b = 0$ , то это решение должно быть конечным при  $X = 0$ , в отличие от решения  $\frac{1}{X}$ , которое обращается в бесконечность.

Это решение имеет вид

$$p_2 = H_i^{(2)}(L_i^A - L_i^B) + F_y^{(2)}(L_y^A + L_y^B) + G_{jk}^{(2)}(L_{jk}^A - L_{jk}^B) + D_{jke}^{(2)}(L_{jke}^A + L_{jke}^B) + \dots + \Phi_s L_s^A X_A^3 + \Psi_y L_y^A X_A^5 + X_{jk} L_{jk}^A X_A^7 + \dots$$

Выражение для скорости жидкости в области 2 имеет вид:

$$\eta_d v_{2i} = U_i \cdot T_2 - \frac{2}{3} H_i^{(2)}(L_0^A - L_0^B) - \frac{3}{5} F_y^{(2)}(L_j^A + L_j^B) - \frac{4}{7} G_{jk}^{(2)}(L_{jk}^A - L_{jk}^B) - \frac{5}{9} D_{jke}^{(2)}(L_{jke}^A + L_{jke}^B) - \dots - \frac{1}{6} H_i^{(2)}(L_y^A X_A^2 - L_y^B X_B^2) - \frac{1}{10} F_{ik}^{(2)}(L_{jk}^A X_A^2 + L_{jk}^B X_B^2) + \Phi_s \left[ \frac{1}{2} L_s^A X_A^3 X_i + \frac{1}{5} L_{is}^A X_A^5 \right] + \Psi_{st} \left[ \frac{1}{2} L_{st}^A X_A^5 X_i + \frac{5}{42} L_{stt}^A X_A^7 \right] + \dots$$

В силу линейности уравнений движения жидкостей в областях 1 и 2 и граничных условий, вычисление неизвестных тензорных коэффициентов  $H_i^{(1)}$ ,  $H_i^{(2)}$ ,  $F_y^{(1)}$ ,  $F_y^{(2)}$ ,  $G_{jk}^{(1)}$ ,  $G_{jk}^{(2)}$ ,  $D_{jke}^{(1)}$ ,  $D_{jke}^{(2)}$ ,  $\Phi_s$ ,  $\Psi_{st}$ , ... сводится к вычислению их в трех задачах.

**Задача 1.** Частицы вморожены в жидкость, то есть  $\vec{v}_A = 0$ ,  $\vec{v}_B = 0$ , частицы помещены в линейный поток жидкости.

**Задача 2.** Поток  $E_y = 0$ , частицы движутся со своими скоростями  $U_i^A$ ,  $U_i^B$  параллельно вектору  $\vec{r}$ .

**Задача 3.** Поток  $E_y = 0$ , частицы движутся со своими скоростями  $U_i^A$ ,  $U_i^B$  перпендикулярно вектору  $\vec{r}$ .

### Задача о взаимодействии “вмороженных” в поток частиц.

Неизвестные тензорные коэффициенты в задаче 1, содержащиеся в выражениях для давления и скорости, должны зависеть от величины  $E_y$ ,  $r_j$ ,  $\frac{a}{r}$  и быть линейными по  $E_y$ , так как граничные условия линейны по этой величине. Используя заданные тензоры  $E_{ij}$ ,  $r_j$ ,  $\delta_{ij}$  можно сконструировать тензор любого ранга, линейный по  $E_y$  и содержащий только скалярную функцию от переменной  $\frac{a}{r}$ . Беря всевозможные линейные по  $E_y$  комбинации тензоров  $E_{ij}$ ,  $r_k$ ,  $\delta_{en}$  можно записать выражение для неизвестных тензоров

Для вычисления неизвестных скалярных функций, содержащихся в тензорных выражениях, рассматривается граничное условие (1). Подставляя выражения для векторов скорости  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  и тензорных коэффициентов  $H_i$ ,  $F_{ij}$ ,  $G_{ijk}$ ,  $D_{ijke}$  с неизвестными скалярными функциями в граничное условие (1) и собирая члены, пропорциональные величинам  $E_y x_j$ ,  $E_{jk} x_j x_k x_i$ ,  $E_{ij} r_j$ ,  $E_{jk} r_j r_k r_i$ ,  $E_{jk} r_j x_k x_i$ ,  $E_{jk} x_j x_k r_i$ ,  $E_{jk} x_k r_j r_i$ ,  $E_{jk} r_j r_k x_i$ , мы получаем восемь алгебраических уравнений. В уравнениях записаны только члены, дающие ненулевой вклад в решение и имеющие порядок не более чем  $\left(\frac{a}{r}\right)^3$ . Уравнения содержат множители, пропорциональные скалярному произведению векторов  $\vec{X} \cdot \vec{r}$ . Однако неизвестные скалярные функции должны зависеть только от переменной  $\frac{a}{r}$ , но не от  $\xi = \vec{X} \cdot \vec{r}$ . Это означает, что в каждом уравнении мы должны собрать члены, имеющие множители с одинаковыми степенями переменной  $\xi$  и сумму этих членов приравнять к нулю. Эта процедура дает число уравнений, больше

восьми. Число алгебраических уравнений будет зависеть от порядка величины  $\frac{a}{r}$  и растет с увеличением точности вычислений. Все неизвестные скалярные функции могут быть представлены в виде рядов по переменной  $\frac{a}{r}$ , так как величина  $\frac{a}{r}$  всегда меньше единицы. В предельном случае касающихся сфер эта величина имеет значение  $\frac{a}{r} = 0,5$ .

Используя уравнения и беря в расчет упомянутые выше соображения, получим выражение для каждой скалярной функции в виде ряда по переменной  $\frac{a}{r}$ .

Найденные выражения скалярных функций используются для вычисления сил, действующих на частицы со стороны несущей жидкости.

Во втором разделе получены аналитические выражения сил, действующих на частицы со стороны несущей жидкости и скорости, приобретаемые ими в результате гидродинамического взаимодействия.

Подставляя выражения для давления  $p_i$  и скорости  $\bar{v}_i$ , тензоров  $H_i^{(1)}$ ,  $F_{ij}^{(1)}$ ,  $G_{ijk}^{(1)}$ ,  $D_{ijkl}^{(1)}$  вместе со значениями скалярных функций в подинтегральное выражение и используя свойства мультиполей  $L_{ij}$ , получим выражения для силы  $\bar{F}$ , действующей на частицу с точностью  $\varepsilon^3$ .

Непосредственное интегрирование дает результат  $F_i = 4\pi H_i^{(1)}$ .

Суммарная сила, действующая на частицу в линейном потоке жидкости, равна

$$F_i^{(1)} + F_i^{(2)} + F_i^{(3)} = 4\pi\eta_l E_{jk} r_j r_k r_i (EB_3^{(1)}\varepsilon^5 + EB_6^{(1)}\varepsilon^6) + 4\pi\eta_l U_i'' (EA_0^{(1)} + EA_1^{(1)}\varepsilon + EA_2^{(1)}\varepsilon^2) + 4\pi\eta_l U_i^\perp (EA_0^{\perp(1)} + EA_1^{\perp(1)}\varepsilon).$$

Для частицы в течении с линейным профилем скоростей сила со стороны жидкости обусловлена присутствием вблизи другой частицы.

Найденные выражения для сил позволяют вычислить скорости частиц, приобретаемые ими в результате гидродинамического взаимодействия.

Используя  $\vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} + \vec{F}^{(3)} + \vec{f} = 0$ , получим выражения для скоростей при наличии внешней силы  $\vec{f}$ , действующей на частицы :

$$U_i^{AII} = -\frac{E_{jk} r_j r_k r_i}{r^2 \cdot EA_0^{II(1)}} \cdot \left( a^2 \cdot EB_5^{(1)} \varepsilon^3 + \left( EB_6^{(1)} - EB_5^{(1)} \cdot \frac{EA_1^{II(1)}}{EA_0^{II(1)}} \right) a^2 \varepsilon^4 \right) -$$

$$-\frac{f_i}{4\pi\eta_l \cdot EA_0^{II(1)}} \left( 1 - \frac{EA_1^{II(1)}}{EA_0^{II(1)}} \varepsilon + \left( \left( \frac{EA_1^{II(1)}}{EA_0^{II(1)}} \right)^2 - \frac{EA_2^{II(1)}}{EA_0^{II(1)}} \right) \varepsilon^2 \right);$$

$$U_i^{A1} = \frac{\left( -f_i + f_j \frac{r_j r_i}{r^2} \right)}{4\pi\eta_l \cdot EA_0^{1(1)}} \cdot \left( 1 - \frac{EA_1^{1(1)}}{EA_0^{1(1)}} \varepsilon + \left( \frac{EA_1^{1(1)}}{EA_0^{1(1)}} \right)^2 \varepsilon^2 \right).$$

Точность вычислений  $\left( \frac{a}{r} \right)^3$  достаточна для нахождения сил, действующих на частицы, а также линейных и угловых скоростей, приобретаемых частицами в результате их гидродинамического взаимодействия, с точностью  $\left( \frac{a}{r} \right)^3$ .

В третьем разделе изучается влияние взаимодействия частиц на их осаждение. Используя полученные во втором разделе выражения для скоростей частиц, рассмотрим задачу о движении двух частиц под действием силы тяжести.

Рассмотрим случай, когда вектор  $\vec{F}$  параллелен вектору ускорения свободного падения  $\vec{g}$ . Будем предполагать, что скорость потока  $\vec{U}$  перпендикулярен вектору  $\vec{r}$ . В этом случае выражение  $E_{jk} r_j r_k$  равно нулю,

$$U_i^{AII} = -\frac{f_i}{4\pi\eta_l EA_0^{II(1)}} \left( 1 - \frac{EA_1^{II(1)}}{EA_0^{II(1)}} \varepsilon + \left( \left( \frac{EA_1^{II(1)}}{EA_0^{II(1)}} \right)^2 - \frac{EA_2^{II(1)}}{EA_0^{II(1)}} \right) \varepsilon^2 \right).$$

В силу громоздкости выражений для скалярных коэффициентов рассмотрены частные случаи движения частиц.

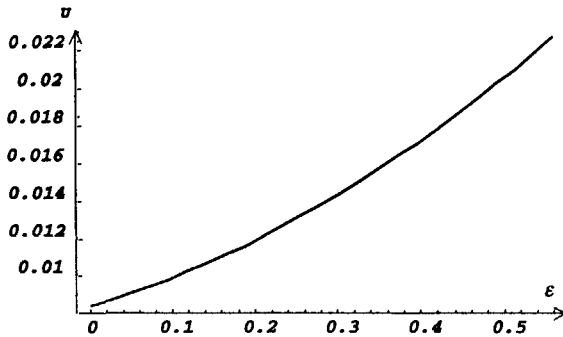


Рисунок 1 - Зависимость параллельной составляющей скорости частицы  $A$  от параметра  $\epsilon$  при  $a=10^{-2}$  см,  $b=0,5 \cdot 10^{-2}$  см,  $\eta_l = 1$  г/(см сек),  $\eta_d = 0,5$  г/(см·сек)

Из рисунка 1 видно, что при сближении частиц их скорость увеличивается.

Также в третьем разделе рассматривается случай, когда  $\vec{r} \perp \vec{g}$  и исследуется осаждение двух частиц в параболическом потоке.

Рассмотрим гидродинамическое взаимодействие двух твердых сферических частиц  $A$  и  $B$  одинакового радиуса  $a$ , которые помещены в неограниченную несжимаемую жидкость с вязкостью  $\eta$ . Считается, что на частицы не действуют внешние силы и моменты и размеры частиц достаточно малы, так что число Рейнольдса  $Re < 1$ . Скорость жидкости на бесконечности  $U$  есть квадратичная функция координат

$$U_i = C_{jk} x_j x_k \quad E_{ii} = \Omega_{ii} = C_{nk} = C_{kn} = 0.$$

Положение центров сфер  $A$ ,  $B$  относительно потока обозначим векторами  $\vec{r}_a$  и  $\vec{r}_b$  соответственно. Уравнения для скорости  $u(x)$  и давления  $p(x)$  в жидкости записываются в приближении Стокса

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \eta \nabla^2 u = \nabla p - \rho_l g.$$

На поверхности частиц имеем условия прилипания

$$|X_a| = a : u_i + U_i(A) + EE_{ij}(A)X_{aj} + W_{ij}(A)X_{aj} + C_{ijk} X_{aj} X_{ak} = V_i^a + \Gamma_{ij}^a X_{aj},$$

$$|X_b| = b : u_i + U_i(B) + EE_{ij}(B)X_{bj} + W_{ij}(B)X_{bj} + C_{ijk} X_{bj} X_{bk} = V_i^b + \Gamma_{ij}^b X_{bj}.$$

На бесконечности

$$|X_a| \rightarrow \infty : u_i \rightarrow 0.$$

Здесь введены следующие сокращения:

$$EE_{ij}(A) = (C_{ijk} r_{ak} + C_{jik} r_{ak}), \quad W_{ij}(A) = (C_{ijk} r_{ak} - C_{jik} r_{ak}),$$

$$EE_{ij}(B) = (C_{ijk} r_{bk} + C_{jik} r_{bk}), \quad W_{ij}(B) = (C_{ijk} r_{bk} - C_{jik} r_{bk}).$$

Векторами  $\vec{V}^a, \vec{V}^b, \vec{\Gamma}^a, \vec{\Gamma}^b$  обозначены абсолютные линейные и угловые скорости сфер  $A$  и  $B$ , а векторами  $\vec{U}(A), \vec{U}(B)$  – скорость невозмущенного потока жидкости в точках, занимаемых центрами сфер  $A$  и  $B$  соответственно.  $\rho_e$  – плотность жидкости,  $\rho_p$  – плотность частицы,  $\rho$  – находится из разности  $\rho = \rho_p - \rho_e$ ,  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения. Линейные и угловые скорости сфер есть неизвестные функции вектора  $\vec{r}$  и параметра  $a/r$ .

Решение уравнений гидродинамики с граничными условиями представляется, в силу их линейности, как сумму решений нескольких задач. В работе приводится постановка и аналитические решения этих задач. Первая задача заключается в нахождении решения уравнений Стокса со следующими граничными условиями на поверхности двух сфер:

$$|X_a| = a : u_i + E_{ij} X_{aj} + EE_{ij}(A) X_{aj} = 0,$$

$$|X_b| = a : u_i + E_{ij} X_{bj} + EE_{ij}(A) X_{bj} = 0.$$

На бесконечности требуем выполнения условия затухания возмущений. Фактически эти граничные условия означают, что частицы движутся с локальными линейными и угловыми скоростями некоторого невозмущенного потока жидкости с линейной скоростью на бесконечности.

Во второй задаче решаются уравнения Стокса со следующими граничными условиями на поверхности двух сфер:

$$|X_a| = a : u_i + C_{ijk} X_{aj} X_{ak} = 0,$$

$$|X_b| = a : u_i + C_{ijk} X_{bj} X_{bk} = 0.$$

Эти условия означают движение замороженных частиц в течении с параболическим профилем скоростей.

Третья задача заключается в нахождении решения уравнений гидродинамики со следующими граничными условиями:

$$|X_j| = a : u_i = 0,$$

$$|X_j| = a : u_i + \Delta E E_{ij} X_{lj} = 0,$$

$$\Delta E E_{ij}(B) = (C_{ijk} r_k + C_{jik} r_k).$$

Четвертая - задача о движении частиц с линейными и угловыми скоростями в покоящейся на бесконечности жидкости со следующими граничными условиями:

$$|X_j| = a : u_i = U_i^a + \omega_{ij}^a X_{aj},$$

$$|X_j| = a : u_i = U_i^b + \omega_{ij}^b X_{bj}.$$

Здесь введены относительные линейные и угловые скорости сфер следующим образом:

$$U_i^a = V_i^a - U_i(A), \quad \omega_{ij}^a = \Gamma_{ij}^a - W_{ij}(A),$$

$$U_i^b = V_i^b - U_i(B), \quad \omega_{ij}^b = \Gamma_{ij}^b - W_{ij}(B).$$

Первые три задачи соответствуют фиксированным положениям сфер в различных потоках с градиентом скорости. Четвертая задача - о движении частиц в покоящейся на бесконечности жидкости.

В работе мы рассматриваем решение, справедливое только с точностью до порядка  $\varepsilon^6$  включительно.

Найденные выражения скалярных функций используются для вычисления сил и их моментов, действующих на частицы со стороны жидкости:

$$F_i^a = 4\pi\eta a \left\{ EE_{jk} \frac{r_j^i r_k^i}{r^2} f_1 + \Delta EE_{jk} \frac{r_j^i r_k^i}{r^2} f_2 + EE_{ij} r_j f_3 + \Delta EE_{ij} r_j A \varepsilon^5 \right\} + F_i -$$

$$- 6\pi\eta a \left[ U_i^{a//} \left( 1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2 \right) - U_i^{b//} \left( \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{19}{8} \varepsilon^3 \right) + U_i^{a\perp} \left( 1 + \frac{9}{16} \varepsilon^2 \right) - U_i^{b\perp} \left( \frac{3}{4} \varepsilon + \frac{59}{64} \varepsilon^3 \right) + \right.$$

$$\left. + \omega_{ij}^b r_j \varepsilon^3 \right] + \rho g_i V_a.$$

$$F_i^b = -4\pi\eta a \left\{ EE_{jk} \frac{r_j^i r_k^i}{r^2} f_1 + \Delta EE_{jk} \frac{r_j^i r_k^i}{r^2} (f_1 - f_2) + EE_{ij} r_j f_3 + \Delta EE_{ij} r_j \frac{27}{4} \varepsilon^5 \right\} + F_i -$$

$$- 6\pi\eta a \left[ U_i^{b//} \left( 1 + \frac{9}{4} \varepsilon^2 \right) - U_i^{a//} \left( \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{19}{8} \varepsilon^3 \right) + U_i^{b\perp} \left( 1 + \frac{9}{16} \varepsilon^2 \right) - U_i^{a\perp} \left( \frac{3}{4} \varepsilon + \frac{59}{64} \varepsilon^3 \right) + \right.$$

$$\left. + \omega_{ij}^a r_j \varepsilon^3 \right] + \rho g_i V_b.$$

Поведение частиц в параболическом течении ( $E_{ij} = 0$ ) существенным образом отличается от поведения частиц в линейном течении ( $C_{ijk} = 0$ ). Так, две частицы в параболическом потоке стремятся расположиться в плоскости, проходящей через ось симметрии течения и на одинаковом расстоянии от этой оси. При этом одна из них приближается к оси, а другая удаляется от нее. В этом случае центр масс двух частиц будет находиться на оси симметрии течения. В линейном поле скоростей такое поведение частиц отсутствует. Такое различие в поведении частиц обусловлено различными свойствами решений для течений со скоростями, представляемыми на бесконечности в виде полиномов четной и нечетной степеней.

Рассматривается вопрос о том, как быстро частицы выходят на положение устойчивого равновесия. Для этого решается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}_a}{dt} = \bar{U}^a, t=0, \bar{r}_a = \bar{r}_{a0} \\ \frac{d\bar{r}_b}{dt} = \bar{U}^b, t=0, \bar{r}_b = \bar{r}_{b0} \end{cases}$$

Здесь  $\bar{U}^a, \bar{U}^b$  - скорости частиц.

Решение системы искалось численно, результаты приведены на рисунках 2 и 3, иллюстрирующих зависимость координат положения центров частиц  $A(x_1, y_1, z_1)$  и  $B(x_2, y_2, z_2)$  от времени при следующих параметрах:  $\rho = 0,1 \text{ г/см}^3$ , диаметр частиц  $0,1 \text{ см}$ .

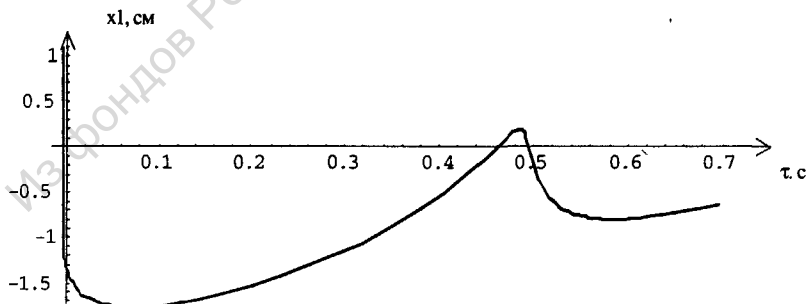


Рисунок 2 - Изменение координаты  $x_1$  центра частицы А при начальных условиях  $x_1(0) = -1,2 \text{ см}$ ,  $x_2(0) = -0,2 \text{ см}$ ,  $\tau \cdot 0,0,7 \text{ с}$



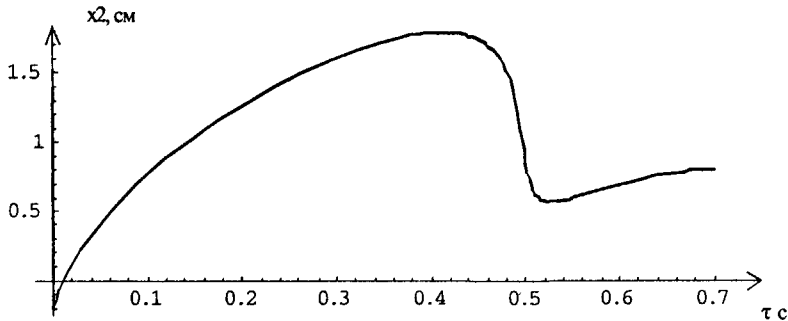


Рисунок 3 - Изменение координаты  $x_2$  центра частицы В при начальных условиях:  
 $x_1(0) = -1,2$  см,  $x_2(0) = -0,2$  см,  $\tau: 0-0,7$  с.

В заключении подводятся итоги и намечаются возможности развития проведенных исследований.

Основные результаты, выносимые на защиту:

Предложена математическая модель, описывающая гидродинамическое взаимодействие двух твердых частиц, покрытых жидкой оболочкой в сдвиговом потоке вязкой несжимаемой жидкости.

На основе полученной математической модели решены: задача о взаимодействии «вмороженных» в поток частиц, осесимметричная и асимметричная задачи движения двух частиц.

В рамках модели получены выражения для сил, действующих на частицы, и скоростей частиц, приобретаемых ими в результате гидродинамического взаимодействия.


Изучено влияние гидродинамического взаимодействия на осаждение частиц в линейном и параболическом потоке.

Показано, что гидродинамическое взаимодействие может служить причиной образования структур в дисперсных системах.

Основные результаты работы изложены в следующих публикациях:

1. Мартынов С.И. Гидродинамическое взаимодействие двух капель, содержащих твердые частицы. / Петухова О.А. // Саранск: Труды Средневолжского матем. общества. - 2002. - Т.3-4. - № 1. - С.246-249.
2. Мартынов С.И. Влияние магнитного поля на движение частиц в потоке с параболическим профилем скорости. / Петухова О.А. // Плес: Труды 10-й Международной конференции по магнитным жидкостям. - 2002. - С. 247-250.
3. Петухова О.А. Обтекание линейным потоком двух капель, содержащих твердые частицы.// Саранск: Вестник Мордовского университета. - 2002. - № 1-2. - С. 122-125.
4. Петухова О.А. Математическая модель взаимодействия частиц, покрытых жидкой оболочкой. - Саранск: Средневолжское матем. общество. - 2002. - Препринт № 46. - 35 с.

Формат 60x84/16 Уч. - изд.л.1.0



Издано в печать 10.09.02. Объем 1,0 п. л. Тираж 100 экз.  
Заказ № 1440

Литография Издательства Мордовского университета  
430006 Саранск, ул. Советская, 24

Из фондов Российской национальной библиотеки

2002-A  
18778

№ 18778

Из фондов Российской национальной библиотеки