САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

На правах рукописи

Выгодчикова Ирина Юрьевна

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

Ql.01.09 - дискретная математика и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Выгу

Саратов - 2004

Работа выполнена на кафедре математической экономики механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского.

Научный руководитель: доктор физико-математических на) к, доцент Дудов Сергей Иванович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Розен Виктор Владимирович,

кандидат физико-математических наук, доцент Камышова Галина Николаевна

Ведущая организация: Волгоградский государственный университет

Защита состоится «21» октября 2004 года в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета К 212.243.02 при Саратовском государственном университете им. Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, IX корпус СГУ, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Саратовского государственного университета.

Автореферат разослан «19» сентября 2004 года.

Учёный секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Корнев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задачи по аппроксимации и оценке многозначных отображений математическими объектами простой структуры находят обширные приложения в естествознании, в том числе в самой математике, и представляют один из разделов негладкого анализа.

Локальными аппроксимациями многозначных отображений занимались многие отечественные и зарубежные математики (Б.Н. Пшеничный, В.Ф. Демьянов, А.М. Рубинов, М.С. Никольский, Е.С. Половинкин, Л И. Минченко, Ж.-П. Обен, В.В. Гороховик и д р .

К задачам, имеющим нелокальный характер, относятся внешнее и внутреннее эллипсоидальное оценивание многозначных отображений. Эллипсоидальными оценками множеств достижимости динамических систем занимались Ф.Л. Черноусько, А.Б. Куржанский и многие другие известные математики.

Относительно немного известно работ по равномерному приближению многозначных отображений на некотором заданном множестве. Так в одной работе М.С. Никольского[1] рассматривается задача о равномерном приближении непрерывного многозначного отображения, заданного на отрезке, постоянным.

В диссертации рассматривается задача минимизации по всем узлам дискретной сетки $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\}$ уклонения образов многозначного отображения (м.о.) $\Phi(\cdot)$ от значений алгебраического полинома:

$$\rho(A) := \max_{k \in [0:N]} \max\{y_{2,k} - p_n(A,t_k); p_n(A,t_k) - y_{1,k}\} \longrightarrow \inf_{A \in R^{n+1}}, \qquad (1)$$

где $\Phi(t_k) = [y_{1k}; y_{2k}]$, $y_{2,k} \geq y_{1k}$, $k \in [0:N]$, $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$, $p_n(A.t_k) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$.

---

[1] М С Никольский Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянным многозначным отображением // Вестник МГУ Сер 15 Выч матем и кибернетика 1990 № 1

Функция

$$f(A,k) := \max\{y_{2,k} - p_n(A,t_k), p_n(A,t_k) - y_{1k}\},$$

называемая далее *амплитудным модулем,* является непрерывной и выпуклой по A, но не является всюду дифференцируемой. Такими же свойствами обладает и целевая функция в задаче (1). Поэтому задача (1) относится к задачам недифференцируемой оптимизации.

С одной стороны, задача (1) имеет сходство с известной задачей П.Л. Чебышёва о наилучшем приближении дискретной функции $y(\cdot)$ алгебраическим полиномом заданной степени

$$\max_{k\in[0\ N]} |y_k - p_n(A,t_k)| \longrightarrow \min_{A\in R^{n+1}}, \tag{2}$$

где $y_k = y(t_k)$, $k \in [0:N]$.

С другой стороны, в плане постановки, её также можно сравнить с задачей Б. Сендова[2] о наилучшем приближении графика сегментной функции графиком алгебраического полинома заданной степени в метрике Хаусдорфа, если иметь в виду дискретный вариант этой задачи Однако, как показано во введении диссертации, задача (1) не сводится ни к задаче Б. Сендова, ни к другим известным задачам теории приближений.

Цель работы заключалась в исследовании свойств решения задачи (1), а именно, требовалось получить

- необходимые и достаточные условия решения задачи,
- необходимые и достаточные условия единственности её решения,
- описание множества крайних точек решения задачи,

а также в разработке алгоритма решения задачи.

Методика исследования включает применение методов многозначного анализа, выпуклого анализа, теории приближений.

[2] Сендов Б Хаусдорфовые приближения София 1979

Научная новизна. В первой части диссертации получены следующие основные результаты:

- необходимые и достаточные условия решения задачи (1);
- критерий единственности решения задачи (1);
- критерий распознавания крайних точек множества решений задачи(1);
- достаточные (и необходимые, в случае $N = n + 1$) условия, при которых решение задачи (2) для дискретной функции

$$y_k = \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2}, \; k = [0:N], \tag{3}$$

является одновременно решением задачи (I).

Во второй части работы приводится общая схема решения задачи (1), разработанная на основе результатов первой главы. Здесь же получен весьма простой способ построения некоторого решения задачи (1) для случая $N = n + 1$. Кроме того, предлагается более рациональный по сравнению с общей схемой алгоритм решения при определенном ограничении на параметры задачи.

Все результаты диссертации являются новыми и приводятся с полными доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты можно использовать в дальнейшем в научных теоретических исследованиях при приближении как дискретных, так и непрерывных многозначных отображений алгебраическими полиномами. Они могут найти применения в теории минимаксных задач, многозначном анализе, теории приближений, при исследовании прикладных задач естествознания и техники, а также могут быть использованы в учебном процессе.

Апробация работы. Результаты исследования опубликованы в десяти печатных работах и докладывались на научных семинарах по негладкому анализу кафедры математической экономики СГУ (2000 - 2004 гг.), на весенних научных конференциях механико-математического факультета (2000 - 2004 гг.), на Саратовских зимних школах-конференциях «Современные проблемы теории функций и их приложения» (2002,2004 г.), на 24-й конференции молодых учёных МГУ (Москва, 2003), на школах - конференциях «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (Воронеж, 2003), «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 2003), на научном семинаре кафедры теории функций и приближений (май, 2004 г.), объединённом научном семинаре по дискретной математике и математической кибернетике механико-математического факультета и факультета компьютерных наук и информационных технологий СГУ.

Публикации по теме диссертации приведены в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, разделённых на десять параграфов и списка литературы из 33 наименований. Общий объём диссертации - 110 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Приведём основные результаты исследования задачи (1).

Во введении диссертации на простых примерах показывается, что задача (1) отличается от известных задач теории приближений, таких как задача П.Л. Чебышёва (2), задача Б. Сендова, задача «об ужах». Здесь же приводится краткая аннотация основных результатов диссертации.

В первой главе получены основные свойства решения задачи (1).

В § 1 приводятся необходимые обозначения и некоторые неравенства, которые следуют из вида целевой функции задачи (1).

Далее понимаем под

$$\rho^* = \inf_{A \in R^{n+1}} \rho(A), \quad \mathfrak{R} = \left\{ A \in R^{n+1} \quad \rho(A) = \rho^* \right\}$$

$$m = \max_{k \in [0 \ N]} \frac{y_{2k} - y_{1k}}{2}$$

В § 2 показано, что при $N \le n$ решение задачи (1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

Теорема 2.1. *Пусть $N \le n$ Задача (1) эквивалентна следующей линейной относительно компонент $(a_0, a_1, \ \ , a_n)$ вектора A системе уравнений*

$$a_0 + a_1 t_k + \quad + a_n t_k^{\,n} = \frac{y_{1k} + y_{2k}}{2} + \alpha_k \left(m - \frac{y_{2k} - y_{1k}}{2} \right), \tag{4}$$

$$k \in [0 \ \ N],$$

где $\alpha_k \in [-1, 1]$, $k \in [0 \ \ N]$ *А именно, любое решение $A^* = \left(a_0^*, a_1^*, \ \ , a_n^*\right)$ задачи (1) является решением системы (4) при некотором наборе параметров $\alpha_k \in [-1, 1]$ $k \in [0 \ \ N]$ и, наоборот, для любого набора параметров $\alpha_k \in [-1, 1]$ $k \in [0 \ \ N]$ решение системы (4) является решением задачи (1)*

При этом $\rho^* = m$

Следствие 2.1. *При $N \le n$ задача (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $N = n$ и выполняются равенства*

$$m = \frac{y_{2k} - y_{1k}}{2}, \quad k \in [0 \ \ n]$$

В остальных случаях задача (1) имеет бесконечно много решений

Из теоремы 2 1 также следует, что решение задачи (1) при $N \le n$ сводится к решению системы неравенств

$$\left| a_0 + a_1 t_k + \quad + a_n t_k^{\,n} - \frac{y_{1k} + y_{2k}}{2} \right| \le m - \frac{y_{2k} - y_{1k}}{2}, \ k \in [0 \ \ N] \tag{5}$$

относительно неизвестных компонент вектора $A \in R^{n+1}$.. Каждое неравенство (5) определяет в пространстве R^{n+1} «слой» гиперплоскостей с общей нормалью $c := \left(1, t_k, t_k{}^2, \ldots, t_k{}^n\right)$, $k \in [0:N]$, причём хотя бы для одного $k \in [0:N]$ правая часть неравенства из системы (5) обращается в ноль, и соответствующий «слой» сжимается в одну гиперплоскость.

В § 3 доказано, что задача (1) всегда имеет решение, причём множество решений задачи (1) является выпуклым и замкнутым, а при $N \geq n$ оно, кроме того, ограничено.

Теорема о необходимых и достаточных условиях решения задачи (1) является, пожалуй, самой важной по значимости в диссертации. Эта теорема доказана в § 4. Для её формулировки введём некоторые обозначения.

Базисом σ назовём $(n + 2)$ - точечную подсистему узлов множества T вида

$$\sigma = \left\{t_{j_0} < t_{j_1} < \ldots < t_{j_{n+1}}\right\} \subset T.$$

Амплитудными функциями **(рис. 1), заданными на базисе** σ**, назовём функции** $\varphi_0(\cdot)$ **и** $\varphi_1(\cdot)$ **со значениями**

$$\varphi_0\left(\sigma, t_{j_k}\right) = \begin{cases} y_{2,j_k}, k - \textit{чётно}, \\ y_{1,j_k}, k - \textit{нечётно}, \end{cases} \quad \varphi_1\left(\sigma, t_{j_k}\right) = \begin{cases} y_{1,j_k}, k - \textit{чётно}, \\ y_{2,j_k}, k - \textit{нечётно}, \end{cases}$$

$$t_{j_k} \in \sigma, \ k \in [0:n+1].$$

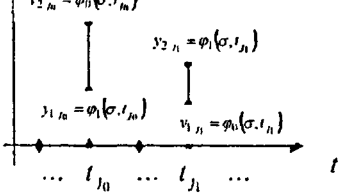

Рис. 1. Амплитудные функции

Если в качестве приближаемой функции в задаче Чебышёва П.Л. (2) взять амплитудную функцию для $i = 0$ или i = 1, эта задача запишется в виде

$$\rho_l\left(A,\sigma\right) := \max_{k\in[0\; n+1]} \left|\varphi_l\left(\sigma, t_{j_k}\right) - p_n\left(A, t_{j_k}\right)\right| \longrightarrow \min_{A\in R^{n+1}}. \qquad (6)$$

Задачи (6) будем называть также *амплитудными* a -подзадачами задачи (1).

Теорема 4.1. (необходимое и достаточное условие решения). *Для того чтобы вектор* $A^* \in R^{n+1}$ *являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий*

$$(a)\ \rho\left(A^*\right) = m;$$

$$(б)\ \exists\sigma^* : \rho\left(A^*\right) = \rho_i^*\left(\sigma^*\right),\ \text{для } i=0 \ \text{или } i=1,$$

где $\rho_i^*\left(\sigma\right) := \min_{A\in R^{n+1}} \rho_i\left(A,\sigma\right),\ i\in 0:1.$

Поясним приведённое утверждение. Равенство (а) означает, что алгебраический полином степени n с вектором коэффициентов A^* «проходит» через середины максимальных по длине отрезков, являющихся образами м.о.

Если выполняется условие (б), то вектор A^* будет решением одной из амплитудных σ - подзадач (6).

В § 5 рассматривается вопрос о единственности решения задачи (1), являющийся одним из самых трудных по доказательству в диссертации.

Теорема 5.2. (критерий единственности решения). *Для того чтобы задача (1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:*

$$(\alpha)\ \text{множество}\quad Z := \left\{k\in\left[0:N\right] : \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = \rho^*\right\}$$

содержит не менее чем $(n+1)$ элемент.

$$(\beta) \quad \exists \sigma^* : \rho^* = \rho_i^*(\sigma^*), \; i=0 \text{ или } i=1.$$

Условие (а) означает, что полином наилучшего приближения для задачи (1) «проходит» через середины максимальных по длине отрезков, являющихся образами м.о., и таковых не менее чем $(n+1)$ штук.

Условие (β) теоремы 5.2 совпадает с условием (б) теоремы 4.] при условии, что вектор A^* является решением задачи (1).

В § 6 решается вопрос о распознавании крайних точек множества решений задачи (1) и даётся оценка их количества. Поскольку при $N < n$ множество решений задачи не имеет крайних точек, считаем $N \geq n$.

Теорема 6.1 (критерий распознавания крайних точек). *Вектор $A^* \in \mathfrak{R}$ является крайней точкой множества решений $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда когда значение амплитудного модуля совпадает с минимальным значением целевой функции задачи (1) в $(n+1)$ различных узлах сетки T, то есть*

$$\exists \; \Delta^* = \{t_{q_0} < \ldots < t_{q_n}\} \subset T : \; f(A^*, q_k) = \rho^*, \forall \, k \in [0:n].$$

Если установлено, что решение задачи (1) не единственно, то $\rho^* = m$. В таком случае несложно отыскать все крайние точки множества решений задачи. Приведём утверждение, которое можно непосредственно использовать для их отыскания.

Следствие 6.1. *Пусть решение задачи (1) не единственно. Вектор $A \in R^{n+1}$ является крайней точкой множества решений задачи (1) тогда и только тогда, когда существует выборка $\Delta = \{t_{q_0} < t_{q_1} < \ldots < t_{q_n}\} \subset T$ и набор $\xi_k \in 0:1$, $k \in [0:n]$ такие, что выполняются равенства*

$$\xi_k \left(p_n(A, t_{q_k}) - y_{1,q_k}\right) + (1-\xi_k)\left(y_{2,q_k} - p_n(A, t_{q_k})\right) = m, \forall \, k \in [0:n], \quad (7)$$

и

$$\max_{k\in[0\ N]} f(A,k)=m \qquad (8)$$

Следствие 6.2. *Множество крайних точек* $E(\mathfrak{R})$ *множества решений задачи (1) при* $N>n$ *конечно и справедлива оценка*

$$1\le|E(\mathfrak{R})|<C_{N+1-|7|}^{n+1\ |7|}\ 2^{n+1}$$

Обозначим через $A(a)$ решение системы (4) для фиксированного набора параметров $\alpha=(\alpha_0,\ \ ,\alpha_n)$ Введем множество

$$M=\left\{k\in[0\ \ N]\ \frac{y_{2k}-y_{1k}}{2}=m\right\}$$

Следствие 6.5 *Пусть* $N=n$ *Множество крайних точек множества решений задачи (1) представимо в виде*

$$E(\mathfrak{R})=\{A(\alpha)\ |\alpha_k|=1,\ \ k\in[0\ \ n]\setminus M\}$$

Легко видеть, что множество решений задачи (1) в этом случае имеет $2^{n+1-|M|}$ крайних точек

В § 7 приводятся условия, при выполнении которых решение задачи (2) для функции, заданной в узлах сетки значениями (3), является одновременно решением задачи (1) Пусть $N\ge n+1$

Теорема 7.1. Для того чтобы решение задачи (2) было одновременно решением задачи (I) достаточно, а в случае $N=n+1$ *и необходимо, чтобы выпочнялось хотя бы одно из условий*

$$|M|=N+1, \qquad (9)$$

$$\exists A\in R^{n+1},\ p_n(A,t_k)=\frac{y_{1k}+y_{2k}}{2},\ \forall\ \ k\in[0\ \ N] \qquad (10)$$

При этом $\rho^*=\rho+m$, *где*

$$\rho=\min_{A\in R^{n+1}}\ \max_{k\in[0\ \ N]}|y_k-p_n(A,t_k)|$$

Следствие 7.1. Для того чтобы решение задачи (2) было единственным решением задачи (1) достаточно, а в случае N -n + \ и необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий (9) или

$$\exists A \in R^{n+1},\ p_n(A,t_k) = \frac{y_{1k} + y_{2,k}}{2}, \quad \forall k \in [0:N] \text{ и } |M| \geq n+1.$$

Во второй главе диссертации на основе полученных фактов предлагается алгоритм решения задачи (1).

В § 8 приводится общая схема решения задачи, основанная на переборе базисов и выборок (n +1) различных точек сетки T.

В § 9 приводится алгоритм решения задачи для случая $N = n + 1$. В этом случае возможен только один базис *а*, который совпадает с T. Обозначим через A_0 и A_1 решения соответствующих амплитудных σ – подзадач (6), и пусть $A_\alpha = (1-\alpha)A_0 + \alpha A_1$, где

$$\alpha = \frac{m - h_0}{2m - h_0 - h_1},$$

$$\begin{cases} h_0 = y_{2,j_k} - p_n(A_0, t_{j_k}), & k - \textit{четно}, \\ h_0 = p_n(A_0, t_{j_k}) - y_{1,j_k}, & k - \textit{нечетно}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -h_1 = y_{1,j_k} - p_n(A_1, t_{j_k}), & k - \textit{четно}, \\ -h_1 = p_n(A_1, t_{j_k}) - y_{2,j_k}, & k - \textit{нечетно}, \end{cases}$$

$$k \in [0:n+1], \quad |h_i| = \rho_i^* \leq \rho^*, \ i \in 0:1.$$

Теорема 9.1. *Пусть $A_0 \notin \mathfrak{R}$, $A_1 \notin \mathfrak{R}$. Тогда вектор A_α является решением задачи (1).*

Таким образом, решением задачи (1) будет либо решение одной из амплитудных σ -подзадач (6), либо выпуклая комбинация этих решений с параметром *а*.

В § 10 излагается монотонный алгоритм для случая $|M| \geq n+2$. По аналогии с известным алгоритмом Валле-Пуссена решения задачи (2).

происходит переход от одного базиса σ к другому Каждый раз выбирается одна из амплитудных σ-подзадач, организуется переход к следующему базису и указывается та из амплитудных подзадач нового базиса, минимальное значение целевой функции которой больше, чем у предыдущей выбранной подзадачи

Автор выражает искреннюю и глубокую признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук С И Дудову за постановку задачи и большое внимание к работе.

ПЕЧАТНЫЕ РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1 Выгодчикова И Ю О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика Механика Сб науч тр Вып 2 Изд во Сарат ун-та, 2000 С 13-15

2 Выгодчикова И Ю О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика Механика Сб науч тр Вып 3 Изд-во Сарат ун-та, 2001 С 25-27

3 Выгодчикова И Ю Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика Механика Сб науч тр Вып 4 Изд-во Сарат ун-та, 2002 С 27-31

4 Выгодчикова ИЮ О крайних точках множества решений задачи о наилучшем приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика Механика Сб науч тр Вып 5 Изд-во Сарат ун-та, 2003 С 15-18

5 Выгодчикова ИЮ О монотонном алгоритме решения задачи наилучшего приближении многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика Механика Сб науч тр Вып 6 Изд-во Сарат ун-та, 2004

6 Выгодчикова И Ю О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Тезисы саратовской зимней матем школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» Саратов 2002 С 4344

7 Выгодчикова И Ю О наилучшем приближении м о алгебраическим полиномом // Тезисы воронежской зимней матем школы «Современные методы теории функций и смежные проблемы» Воронеж, 2003 г С 62-63

8 Выгодчикова ИЮ О задаче наил)чшею приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом алгоритм решения // Сб матер 24-ой конфер мол ученых Москва изд-во МГУ. 2003

9 Выгодчикова ИЮ Критерий единственности решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Тезисы Сб науч трудов матем центра им НИ Лобачевского Казань, 2003 г С 52-54

10 Выгодчикова И 10 Процедура решения задачи приближения многозначного отображения алгебраическим полиномом //Тезисы саратовской зимней матем школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» Саратов, 2004 С 48-50

Подписано в печать 31 08 2004 Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная
Гарнитура Times Печать RISO Объем 1,0 печ л Тираж 100 экз Заказ № 351

Отпечатано с готового оригинал-макета
Центр полиграфических и копировальных услуг
Предприниматель Серман Ю Б Свидетельство №3117
410600, Саратов, ул Московская, д.152, офис 19