ВОЕННО-ВОЗДУШНАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ АКАДЕМИЯ
имени профессора Н.Е. ЖУКОВСКОГО

На правах рукописи

ФЕДЯЕВ ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

УДК 532.546

Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта

05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2005

Работа выполнена на кафедре теоретической физики
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор
В.Ф. Пивень

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор
Е.В. Захаров

доктор физико-математических наук,
доцент
А.В. Сетуха

Ведущая организация:

Институт вычислительной
математики РАН

Защита состоится « 2 » июня 2005 года в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 215.001.01 Военно-воздушной инженерной академии имени профессора Н.Е. Жуковского по адресу: 125190, г. Москва, ул. Планетная, д. 3.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Военно-воздушной инженерной академии имени профессора Н.Е. Жуковского.

Автореферат разослан « 25 » апреля 2005 года.

Учёный секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук **А.С. Ненашев**

В автореферате пронумеровано 21 стр.

Общая характеристика работы

Актуальность исследования. Задачи совместной фильтрации двух и более жидкостей в пористых средах привлекают внимание многих исследователей. Объясняется это тем, что к таким задачам приводит эксплуатация нефтяных и газовых месторождений, работа водозаборов, подземное захоронение жидких промышленных отходов.

Как правило, грунт в котором происходит фильтрация неоднороден. В естественных условиях встречаются различные типы неоднородности пористых сред. Это протяжённые непроницаемые участки (сбросы), полости со свободной жидкостью (каверны), плохо проницаемые глинистые породы, трещиновидность среды, изменчивость свойств среды по площади и толщине. Неоднородности природных пластов оказывают сильное влияние на движение границы раздела жидкостей. Одной из актуальных проблем практики является изучение степени влияния неоднородности пласта на процесс фильтрационного течения.

Практически значимы задачи, связанные с совместной фильтрацией двух и более жидкостей в однородных и неоднородных средах. В математическом отношении эти задачи являются одними из наиболее сложных. Поэтому был построен ряд математических моделей, позволяющий исследовать этот процесс.

Наиболее простой является модель «разноцветных» жидкостей. В этой модели полагают, что физические характеристики жидкостей (вязкости и плотности) одинаковы. Граница раздела жидкостей представляет собой линию отмеченных частиц. Эта модель получила широкое применение, так как она позволяет получить решения ряда задач в конечном виде. В общем случае параметрические уравнения движения границы раздела «разноцветных» жидкостей в неоднородных и анизотропных слоях получены О.В. Голубевой.

Следующей по сложности является модель «поршневого» вытеснения (модель Лейбензона-Маскета). В этой модели одна жидкость вытесняет другую полностью, в результате чего граница раздела жидкостей является резкой. Вытесняющая и вытесняемая жидкости имеют различные физические свойства.

Для решения двумерных задач «поршневого» вытеснения используется ряд методов. Так И.А. Чарным был разработан приближённый метод жестких трубок тока. В «поршневой» модели, впервые предложенной Л.С. Лейбензоном, вязкость вытесняющей жидкости полагалась равной нулю. В этом случае граница раздела всё время остаётся контуром постоянного давления и задача допускает аналитическое решение. Первые решения в такой постановке были получены работах

П.Я. Полубариновой—Кочиной и Л.А. Галина. Эта модель широко применяется при исследовании устойчивости движения границы раздела жидкостей. Наиболее известными являются исследования течений в щелевом лотке, проведённые Сафменом и Тейлором.

Для решения задач «поршневого» вытеснения широко используются методы теории потенциала. Впервые потенциал простого слоя для решения обратных задач с подвижной границей применил Г.Г. Тумашев. Этот подход был развит В.Л. Даниловым, который предложил способ сведения задач взаимного вытеснения несжимаемых жидкостей к одному или системе интегро-дифференциальных уравнений. Для решения интегро-дифференциальных уравнений движения границы раздела жидкостей были разработаны различные методы, которые широко использовались многими исследователями.

Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что часть вытесняемой жидкости остаётся за фронтом вытеснения и извлекается вместе с вытесняющей жидкостью. При вторичной разработке месторождения необходим учет неполноты вытеснения. В этом случае используются модели двухфазной (многофазной) фильтрации.

Модель фильтрации двух несмешивающихся жидкостей с использованием фазовых проницаемостей и в предположении несжимаемости жидкости была предложена Бакли и Левереттом (модель Бакли—Леверетта). Но эта модель не учитывает влияния капиллярных сил. Совершенствуя её Рапопорт и Лис предложили метод их учёта (модель Рапопорта—Лиса, которую также называют моделью Маскета—Леверетта). Уравнения течения неоднородных жидкостей в общих предположениях были даны М. Маскетом и М. Мересом, рассмотревших изотермические процессы при наличии трёх фаз (вода, жидкость, газ). Модели основанные на уравнениях Маскета—Мереса называют моделями черной нефти. Для расчёта многофазных фильтрационных течений получили распространение численные методы, основанные на различных способах конечно-разностной аппроксимации исходной системы нелинейных уравнений в частных производных.

В данной работе для решения задач о эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородных слоях применяется метод интегральных уравнений. Использование теории потенциала для линейных задач фильтрации позволяет перейти от двумерных (трёхмерных) дифференциальных уравнений к сингулярным и гиперсингулярным интегральным уравнениям, записанным на кривых (поверхностях). Это понижает размерность уравнений задачи и сокращает объём вычислений.

Метод интегральных уравнений широко применяется при решении граничных задач теории фильтрации. Так в работах В.Ф. Пивня, И.К. Лифанова, А.А. Аксюхина, М.А. Фролова, С.Л. Ставцева, А.А. Квасова с его помощью исследованы двумерные и трёхмерные задачи сопряжения в неоднородных слоях грунта. Изучена работа системы скважин в кусочно-неоднородных пластах с проводимостью, моделируемой степенной, гармонической и метагармонической функциями координат. В ряде работ Д.Н. Никольского изучено продвижение границы раздела жидкостей различной вязкости в однородных и неоднородных (степенных) слоях грунта.

Из приведенного обзора следует, что в известных трудах не исследованы задачи о движении границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях с произвольными границами сопряжения этих слоев и области фильтрации в случае первоначально произвольной подвижной границы.

Целью работы является построение и исследование новых математических моделей эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. На основе этих моделей изучить влияние неоднородности слоев, различия вязкостей и границы области фильтрации на движение границы раздела жидкостей.

Научная новизна и теоретическое значение работы состоят в следующем:

1. Построены и исследованы новые двумерные математические модели эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных степенных слоях. Область фильтрации может быть ограничена непроницаемыми и эквипотенциальными линиями. Граница раздела жидкостей различной вязкости, границы сопряжения слоев и области фильтрации моделируются кривыми класса Ляпунова.

2. Поставлена двумерная задача о нахождении поля скоростей и движения границы раздела жидкостей. Впервые эта задача формулируется для поля скоростей, что позволяет её свести к эволюционной задаче для системы интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. При решении используется вихревой слой. Это понижает сингулярность полученных интегральных уравнений и учитывает условие на бесконечности. Если необходимо найти только положение подвижной границы, то можно опустить этап определения поля скоростей в пласте.

3. Получены в конечном виде решения новых задач о движении границы раздела «разноцветных» жидкостей в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. Эти решения использованы как тестовые.

4. Исследовано влияние различия вязкостей, неоднородности грунта, границ сопряжения слоев и границ области фильтрации, а также положения скважин на эволюцию границы раздела жидкостей.

Отметим, что предложенные модели могут быть применены для исследования явлений и процессов различной физической природы, которые описываются уравнениями такого же математического вида, как и используемые в работе.

Практическая значимость. Построенные модели применены к актуальным задачам практики в случае кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоев. Решены конкретные задачи, возникающие при разработке нефтеносных (водоносных) слоев грунта сложной геологической структуры, захоронении жидких промышленных отходов. Результаты исследований могут быть использованы в природоохранных мероприятиях для нахождения условий работы водозаборов без загрязнения.

Для модели «разноцветных» жидкостей и канонических границ сопряжения слоев и области фильтрации найдены формулы для определения времени достижения границ области фильтрации и времени заводнения (загрязнения) эксплуатационных скважин. В случае двумерного движения жидкостей различных вязкостей эти величины найдены численно.

Исследовано влияние на эволюцию границы раздела жидкостей различия вязкостей, границы сопряжения слоев, степени неоднородности слоя и границ области фильтрации. Это позволило указать критерии использования более простых моделей движения жидкостей вместо сложных численных расчетов.

Достоверность результатов работы обеспечивается применением строгого математического аппарата и подтверждена сопоставлением полученных в ней результатов с известными результатами, найденными на основе более простых моделей.

Апробация работы. Работа в целом докладывалась на заседаниях научного семинара «Проблемы гидродинамики» кафедры теоретической физики Орловского госуниверситета (рук. профессор В.Ф. Пивень), «Интегральные уравнения» факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (рук. профессор Е.В. Захаров и профессор И.К. Лифанов), на заседании кафедры теоретической физики Орловского госуниверситета (зав. кафедрой профессор В.Ф. Пивень).

По мере получения основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара «Проблемы гидродинамики», ежегодных научных конференциях Орловского госуниверситета (1999 — 2004 г.г.), XI Международном симпозиуме «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ - 2003) (Харьков-Херсон, 2003 г.). Также результаты работы были представлены в виде докладов на конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели» (Челябинск, 2002 г.), Восьмой и Девятой Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых учёных (Екатеринбург, 2002 г.; Екатеринбург-Красноярск, 2003 г.), VIII Четаевской международной конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением» (Казань, 2002 г.), Международной конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2002 г.), IV Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2003 г.), Международной конференции по вычислительной математике (Новосибирск, 2004 г.), Международной научной конференции «Интегральные уравнения и приложения в физике, механике и медицине» (Кишинёв, 2004 г.). Часть результатов докладывалась и опубликована в Трудах IX, X, XI Международных симпозиумов и Трудах Международных школ-семинаров МДОЗМФ.

На защиту выносятся: построенные и исследованные новые математические модели двумерного движения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы, пяти приложений и 137 иллюстраций. Общий объём работы составляет 191 страницу. Библиография содержит 185 наименования.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, приведён обзор литературы по теме исследования, указана цель работы и её новизна, показана теоретическая и практическая значимость результатов исследований и их достоверность. Введение заканчивается кратким изложением основного содержания диссертационной работы.

В *первой главе,* следуя работам В.Ф. Пивня, ставится задача об эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое грунта. Рассматривается двумерная линейная фильтрация несжимаемой жидкости в тонком неоднородном и недеформируемом слое проводимости $P(M) = K(M)H(M)$, где M — точка в плоскости основания слоя, $K(M)$ — коэффициент проницаемости слоя, $H(M)$ —его толщина. Проводимость $P(M) > 0$ является непрерывной с первыми частными производными функцией координат. В работе проводимость моделируется постоянной функцией (однородный слой) либо степенной функцией (неоднородный слой). Движение жидкости вызвано источниками и стоками течения, которые являются особыми точками поля скоростей. Они моделируют работу совершенных нагнетательных и эксплуатационных скважин. Поле скоростей жидкости в области течения D, за исключением особых точек, удовлетворяет известной системе уравнений, которая в безразмерных величинах имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_y}{K}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_x}{K}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(Hv_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(Hv_y\right) = 0. \tag{1}$$

Здесь $\vec{v} = \vec{v}(M,t)$, $K = K(M)$, $H = H(M)$, $M \in D$, t — время.

Неподвижная граница Г делит область фильтрации D на области D_1 и D_2, в которых слой характеризуются проводимостями P_1 и P_2 (см. рис. 1). Полагаем, что $P_\nu = k_\nu P$ (k_ν—постоянные), $\nu = 1, 2$. Скачок проводимости на границе Г обусловлен изменением коэффициента проницаемости слоя (толщина слоя H непрерывна).

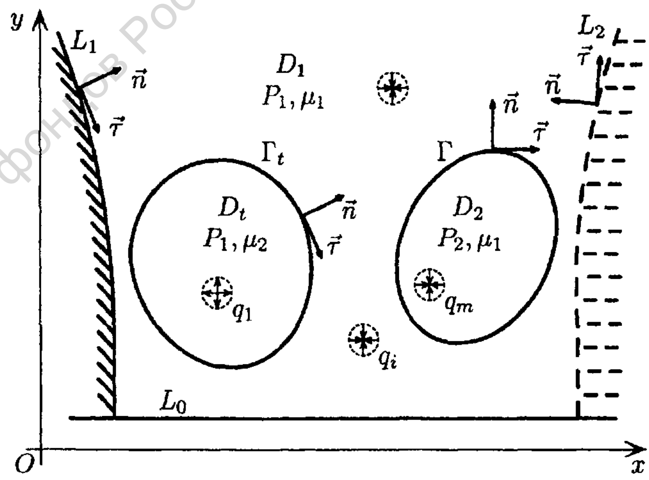

Рис. 1. Область фильтрации

В области фильтрации D также присутствует изменяющаяся область D_t, ограниченная кривой Γ_t. В области D_t движется жидкость постоянной вязкости μ_2, а вне этой области находится жидкость постоянной вязкости μ_1.

Область фильтрации может быть ограничена непроницаемой границей L_1 и эквипотенциальной границей L_2. В области течения D также может присутствовать сингулярная линия L_0. Если проводимость слоя на ней обращается в ноль, обозначим её L_{01}. Когда же проводимость слоя на сингулярной линии обращается в бесконечность, обозначим её L_{02}. Сингулярная линия $L_0 = L_{01} \cup L_{02}$ служит границей области фильтрации D. Таким образом, под областью течения D понимается $D = D_1 \cup D_2$. Обозначим $C = \Gamma \cup \Gamma_t \cup L_1 \cup L_2$ — контур, который обходится по часовой стрелке.

При отсутствии границ Γ $(k_1 = k_2 = 1)$, Γ_t $(\mu_1 = \mu_2 = 1)$, L_1 и L_2 известно невозмущённое поле скоростей $\vec{v}_0(M,t)$. Это поле скоростей учитывает наличие особых точек течения в области фильтрации D. Положение особых точек поля скоростей произвольно, а их мощности могут меняться со временем. Тогда невозмущённое поле скоростей имеет вид:

$$\vec{v}_0(M,t) = \sum_{i=1}^{m} q_i(t) \vec{F}_i(M, M_{0i}) \tag{2}$$

где m —число источников (стоков), $q_i(t)$ —их мощности. Вид функций $\vec{F}_i(M, M_{0i})$ зависит от закона изменения проводимости слоя. Они имеют сингулярность т и $\dfrac{1}{|\vec{r}_M - \vec{r}_{M_{0i}}|}$ точках нахождения особенностей M_{0i}.

Скорость $\vec{v}_0(M,t)$ удовлетворяет уравнениям (1) и граничному условию на сингулярной линии L_0. Представим искомое поле скоростей следующим образом

$$\vec{v}(M,t) = \vec{v}_0(M,t) + \vec{V}(M,t), \tag{3}$$

где $\vec{V}(M,t)$ — скорость возмущения, вызванного наличием границ Γ, Γ_t, L_1 и L_2.

Так как $\vec{v}_0(M,t)$ непрерывна на границах Γ, Γ_t, L_1 и L_2, то скорость возмущения $\vec{V}(M,t)$ также должна удовлетворять уравнениям (1) и соответствующим условиям на этих границах. На границе Γ выполняются условия сопряжения для нормальной и касательной составляющей скорости возмущения, которые имеют вид:

$$\begin{gathered}(1-\lambda_k)V_\tau^+(M,t) - (1+\lambda_k)V_\tau^-(M,t) = 2\lambda_k v_{0\tau}(M,t), \\ V_n^+(M,t) = V_n^-(M,t), \ \lambda_k = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2), \ M \in \Gamma.\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь и далее «+» («-») обозначены предельные значения соответствующих величин при подходе к границе со стороны нормали n (или противоположной стороны).

Полагаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение) и капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда на подвижной границе Γ_t выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости:

$$(1-\lambda_\mu)V_\tau^+(M,t)-(1+\lambda_\mu)V_\tau^-(M,t)=2\lambda_\mu v_{0\tau}(M,t),$$
$$V_n^+(M,t)=V_n^-(M,t),\ \lambda_\mu=(\mu_2-\mu_1)/(\mu_2+\mu_1),\ M\in\Gamma_t. \tag{5}$$

Когда область фильтрации D ограничивает кривая L_1, то на ней выполняется условие непроницаемости:

$$V_n^+(M,t)=-v_{0n}(M,t),\quad M\in L_1. \tag{6}$$

На границе L_2 выполняется условие постоянства давления:

$$V_\tau^+(M,t)=-v_{0\tau}(M,t),\quad M\in L_2. \tag{7}$$

На сингулярной линии L_0 выполняется условие отсутствия расхода жидкости или постоянства давления:

$$H(M)V_n(M,t)=0,\quad M\in L_{01}, \tag{8}$$
$$V_\tau(M,t)=0,\quad M\in L_{02}. \tag{9}$$

Если область D содержит бесконечно удалённую точку, то потребуем затухания скорости возмущения на бесконечности

$$V(M,t)\to 0\quad \text{при}\quad \rho(M,C)\to\infty, \tag{10}$$

где $\rho(M,C)$ — расстояние между точкой M и контуром C.

Границу Γ_t описываем параметрическим уравнением $\vec{r}_M=\vec{r}_M(t,\alpha)$ (α — параметр). В начальный момент времени её положение известно:

$$\text{при}\quad t=0\quad \vec{r}_M=\vec{r}_0(\alpha),\quad M\in\Gamma_0. \tag{11}$$

Уравнение движения границы Γ_t запишем в виде:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt}=\vec{v}_0(M,t)+\frac{1}{2}\left[\vec{V}^+(M,t)+\vec{V}^-(M,t)\right],\quad M\in\Gamma_t. \tag{12}$$

Таким образом, нахождение поля скоростей $\vec{v}(M,t)$ и положения границы Γ_t сводится к отысканию скорости возмущения $\vec{V}(M,t)$, удовлетворяющей уравнениям (1), условиям (4) — (10) и интегрировании дифференциального уравнения (12) при начальном условии (11).

Полагаем, что кривые Γ, Γ_t, L_1 и L_2 в любой момент времени можно моделировать кривыми класса Ляпунова. Следуя В.Ф. Пивню будем искать скорость возмущения $\vec{V}(M,t)$ в виде потенциала вихревого слоя, непрерывно распределённого с плотностями $g(N,t)$, $f(N,t)$, $h_1(N,t)$ и $h_2(N,t)$ на границах Γ, Γ_t, L_1 и L_2 соответственно:

$$\vec{V}(M,t) = \int\limits_{\Gamma} g(N,t)\vec{V}_{\text{B}}^*(M,N)d\ell_N + \int\limits_{\Gamma_t} f(N,t)\vec{V}_{\text{B}}^*(M,N)d\ell_N +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{L_i} h_i(N,t)\vec{V}_{\text{B}}^*(M,N)d\ell_N, \quad M \in D. \qquad (13)$$

Здесь $\vec{V}_{\text{B}}^*(M,N) = \vec{V}_{\text{B}}(M,N)/K(N)$, $\vec{V}_{\text{B}}(M,N)$ —скорость в точке M от нормированного вихря, соответствующего уравнениям (1), который расположен в точке N. Если область D ограничивает линия L_0, то $V_{в}$ (M, N) удовлетворяет условиям (8) и (9).

Скорость возмущения (13) удовлетворяет условию (10). Непрерывно продолжая $\vec{V}(M,t)$ на контур C, получаем её предельные значения:

$$\vec{V}^{\pm}(M,t) = \vec{V}(M,t) \pm \frac{\gamma(M,t)}{2}\vec{\tau}_M, \; M \in C. \qquad (14)$$

Здесь под $\vec{V}(M,t)$ понимается прямое значение скорости возмущения (13) на контуре C, $\gamma(M,t)$ —плотность распределения вихрей на соответствующей части этого контура.

Подставляя (14) в граничные условия (4)-(7), получаем систему неоднородных интегральных уравнений первого и второго рода:

$$g(M,t) - 2\lambda_k V_\tau(M,t) = 2\lambda_k v_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma; \qquad (15)$$

$$f(M,t) - 2\lambda_\mu V_\tau(M,t) = 2\lambda_\mu v_{0\tau}(M,t), \quad M \in \Gamma_t; \qquad (16)$$

$$V_n(M,t) = -v_{0n}(M,t), \quad M \in L_1; \qquad (17)$$

$$\frac{h_2(M,t)}{2} + V_\tau(M,t) = -v_{0\tau}(M,t), \quad M \in L_2, \qquad (18)$$

где обозначено $V_\tau(M,t) = \vec{V}(M,t)\cdot\vec{\tau}_M$, $V_n(M,t) = \vec{V}(M,t)\cdot\vec{n}_M$, а скорость $\vec{v}_0(M,t)$ имеет вид (2).

Уравнение движения границы Γ_t (12) примет вид:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \vec{V}(M,t), \quad M \in \Gamma_t, \qquad (19)$$

где $\vec{V}(M,t)$ — прямое значение скорости (13) на границе Γ_t.

Следовательно, нахождение скорости $\vec{V}(M,t)$ и положения границы Γ_t в любой момент времени сводится к решению эволюционной задачи для системы уравнений (13), (15) — (19) при начальном условии (11).

Если необходимо найти только положение грапицы Γ_t, то можно уменьшить число уравнений в полученной системе. Для этого исключим $f(M,t)$ из уравнения (19). Умножив (19) скалярно на единичный вектор касательной $\vec{\tau}_M$ в точке M границы Γ_t и используя уравнение (16), имеем

$$f(M,t) = 2\lambda_\mu \frac{d\vec{r}_M}{dt} \cdot \vec{\tau}_M, \quad M \in \Gamma_t. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19) получаем векторное интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t:

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}^*_{\text{B}}(M,N)d\ell_N - \int\limits_{\Gamma} g(N,t)\vec{V}^*_{\text{B}}(M,N)d\ell_N -$$
$$- \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{L_i} h_i(N,t)\vec{V}^*_{\text{B}}(M,N)d\ell_N = \vec{v}_0(M,t), \quad M \in \Gamma_t. \tag{21}$$

Используя равенство (20) из (15), (17) и (18) имеем интегральные уравнения для определения плотностей $g(M,t)$, $h_1(M,t)$ и $h_2(M,t)$. Следовательно, изучение движения границы Γ_t сводится к эволюционной задаче для системы интегро-дифференциального (21) и интегральных уравнений (15), (17) и (18) при начальном условии (11).

Решение поставленной задачи значительно упрощается, когда границы Γ, L_1 и L_2 имеют канонический вид (прямая, окружность). В этом случае иногда удаётся выбрать невозмущённое поле скоростей $\vec{v}_0(M,t)$ и скорость вихря $\vec{V}_{\text{B}}(M,N)$ таким образом, что граничные условия на границах Γ, L_1 и L_2 выполняются. Тогда исследование задачи сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} - 2\lambda_\mu \int\limits_{\Gamma_t} \frac{d\vec{r}_N}{dt} \cdot \vec{\tau}_N \vec{V}^*_{\text{B}}(M,N)d\ell_N = \vec{v}_0(M,t), \quad M \in \Gamma_t. \tag{22}$$

Заметим, что в случае отсутствия границ Γ, L_1 и L_2 интегро-дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет тот же вид (22). В указанных случаях нахождение положения границы Γ_t в любой момент времени сводится к эволюционной задаче для интегро-дифференциального уравнения (22) при начальном условии (И).

Полученная система уравнений решается численно на основе методов дискретных особенностей развитых в трудах С.М. Белоцерковского, И.К. Лифанова и других исследователей. Используя этот подход записывается дискретный аналог основной системы уравнений и решение эволюционной задачи сводится к последовательному решению системы линейных алгебраических уравнений.

Метод дискретизации позволяет решать полученную систему уравнений для границ, моделируемых кусочно-гладкими кривыми класса Ляпунова, что расширяет класс задач доступных для исследования.

Вторая глава посвящена построению и исследованию новых математических моделей плоскопараллельного движения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных слоях грунта. Изучено радиальное движение границы раздела жидкостей. Это точное аналитическое решение используется для оценки сходимости численных методов решения исследуемой задачи. Также полученные решения сопоставлены с известными результатами В.Л. Данилова и Д.Н. Никольского. При вытеснении вязкой жидкости жидкостью с малой вязкостью движение границы неустойчиво. Для расчёта в этом случае используется метод регуляризации, предложенный А.В. Сетухой.

В работе исследована эволюция границы раздела жидкостей от нагнетательной скважины при наличии границы сопряжения слоев грунта. Скважина работает с постоянным дебитом и находится на характерном расстоянии d от границы сопряжения слоев. Граница Г моделируется прямой линией, окружностью, и эллипсами. В случае модели «разноцветных» жидкостей для границы сопряжения слоев в виде прямой линии и окружности аналитически найдено поле скоростей и время T_Γ достижения границы Г. Исследовано влияние различия вязкостей (параметра λ_μ) и различия проницаемостей (параметра λ_k) на движение границы Γ_t и время T_Γ.

Во всех рассмотренных случаях установлено, что при $\lambda_k < 0$ (область D_2 более проницаема) с увеличением вязкости нагнетаемой жидкости (параметра λ_μ) время T_Γ увеличивается, а при $\lambda_k > 0$ время T_Γ уменьшается. При $\lambda_\mu \to 1$ движение жидкости является практически радиальным.

Исследована эволюция границы Γ_t от нагнетательной скважины в кусочно-однородном слое, ограниченном прямолинейной непроницаемой границей L_1 или эквипотенциальной границей L_2. Граница сопряжения слоев Г моделируется прямой линией, ортогональной границе области фильтрации, и окружностью. Для прямолинейной границы Г в случае одножидкостной модели аналитически найдено поле скоростей.

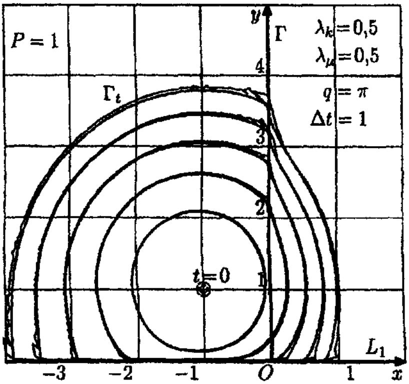

Рис. 2. Эволюция границы Γ_t в слое $P = 1$ при наличии границы L_1

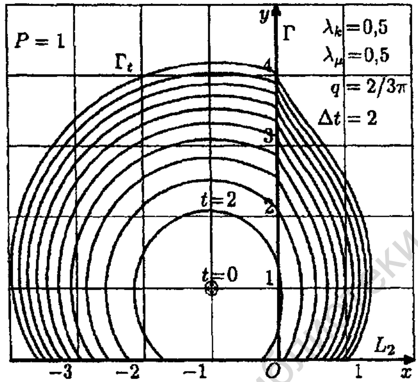

Рис. 3. Эволюция границы Γ_t в слое $P = 1$ при наличии границы L_2

Было установлено, что наибольшее влияние на движение жидкости оказывает прямая граница сопряжения слоев Г. При достижении границей Γ_t линии сброса L_1 жидкость начинает растекаться вдоль неё. В качестве примера на рис. 2 показана эволюция границы Γ_t в этом случае при $\lambda_\mu = 0{,}5$ и $\lambda_k = 0{,}5$. За характерный размер выбиралось расстояние от скважины до границы Г. Характерное время равно времени $T_Г$ при $\lambda_k = 0$ и отсутствии линии сброса.

Вблизи границы сопряжения слоев и линии сброса разбиение подвижной границы становится сильно неравномерным. Поэтому при расчётах граница Γ_t на каждом шаге по времени интерполировалась сплайнами и разбивалась заново. Так на рис. 2 тонкой линией показаны положения границы Γ_t, полученные без её интерполяции, а толстой — полученные при интерполяции границы линейными сплайнами.

Наличие линии сброса вызывает уменьшение времени $T_Г$, то есть жидкость быстрее достигает границы сопряжения слоев. При $\lambda_k = 1$ область D_2 моделирует непроницаемое включение. В этом случае граничные условия на границе Г и границе L_1 совпадают. На непроницаемой границе имеет место сингулярное интегральное уравнение первого рода для численного решения которого используется предложенный И.К. Лифановым метод регуляризации. Были рассмотрены непроницаемые границы Г в виде прямой и окружности. При сопоставлении полученных численных решений со случаем аналитического учёта непроницаемых границ установлено хорошее соответствие.

На рис. 3 показана эволюция границы Г в кусочно-однородном слое, ограниченном эквипотенциальной границей L_2. Линия L_2 моделирует границу области фильтрации со свободной жидкостью. При достижении границей Γ_t эквипотенциальной границы L_2 нагнетаемая жидкость начинает попадать в бассейн со свободной жидкостью и загрязнять его. Поэтому важное значение имеет время T_L достижения границей Γ_t линии L_2. В качестве характерного времени в этом случае выбирается время T_L при $\lambda_k = 0$ и $\lambda_\mu = 0$, которое находится аналитически.

Установлено, что с увеличением вязкости нагнетаемой жидкости (параметра λ_μ) время T_L увеличивается для всех значений параметра λ_k. При увеличении параметра λ_k (уменьшении проницаемости области D_2) время T_L уменьшается. При $\lambda_\mu \to 1$ имеет место практически радиальное движение границы Γ_t и время T_L практически постоянно для всех значений параметра λ_k.

В работе исследована эволюция границы раздела жидкостей от нагнетательной к эксплуатационной скважине в кусочно-однородном слое. Скважины работают с одинаковыми по модулю дебитами. Область D_2 представляет собой включение, находящееся между скважинами. Граница сопряжения слоев Г моделируется окружностью, эллипсами и прямоугольником. В случае модели «разноцветных» жидкостей для границы Г в виде окружности аналитически найдено время T_z, по истечении которого нагнетаемая жидкость попадёт в эксплуатационную скважину и будет загрязнять откачиваемую жидкость.

Изучено влияние на время T_z параметра λ_k, положения и формы границы сопряжения слоев. Было установлено, что для каждой границы Г начиная с некоторого значения параметра $\lambda_k > 0$ меняется направление прорыва нагнетаемой жидкости к эксплуатационной скважине. При увеличении вязкости нагнетаемой жидкости (параметра λ_μ) увеличивается и время T_z.

Также рассмотрена эволюция границы Γ_t от нагнетательной к эксплуатационной скважине в кусочно-однородном слое, ограниченном непроницаемой или эквипотенциальной границей. Область D_2 представляет собой включение в виде круга, находящееся между скважинами. Изучено влияние границы области фильтрации на время T_z. Установлено, что когда скважины приближаются к непроницаемой границе L_1, то время T_z уменьшается. Если же скважины приближаются к эквипотенциальной границе L_2, то время T_z увеличивается. Найдены условия, при которых наличием границ области фильтрации можно пренебречь.

В *третьей главе* построены и исследованы новые математические модели двумерной эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородных слоях, проводимость которых характеризуется степенной функцией вида $P = y^s$ и $P = y^{-s}$ $(s > 0)$.

Граница сопряжения слоев моделировалась прямой линией, ортогональной сингулярной линии $L_0 : y = 0$, и окружностью. В случае модели «разноцветных» жидкостей для границы Г в виде прямой линии аналитически найдено поле скоростей.

Изучено движение границы раздела жидкостей от нагнетательной скважине в кусочно-неоднородном слое, проводимость которого $P = y^s$. Исследовано два случая изменения проводимости слоя. В первом случае по степенному закону изменяется толщина слоя: $H = y^s$, $K = 1$. Во втором случае по степенному закону изменяется проницаемость слоя: $K = y^s$, $H = 1$.

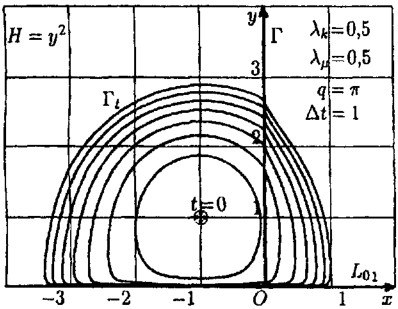

Рис. 4. Эволюция границы Γ_t в слое $H = y^2$

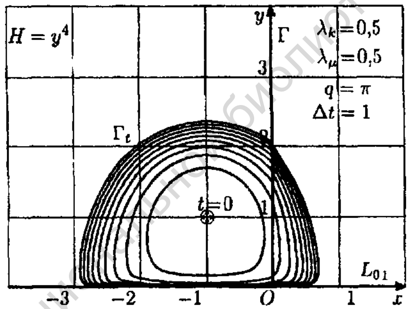

Рис. 5. Эволюция границы Γ_t в слое $H = y^4$

В качестве примера на рис. 4 показана эволюция границы Γ_t от нагнетательной скважины в слое $H = y^2$, а на рис. 5 в слое $Я = y^4$. Граница Г представляет собой прямую линию, $\lambda_\mu = 0{,}5$, $\lambda_k = 0{,}5$. Видим, что при достижении границей Γ_t сингулярной линии L_{01} нагнетаемая жидкость начинает растекаться вдоль неё. С увеличением степени неоднородности слоя движение границы Γ_t замедляется.

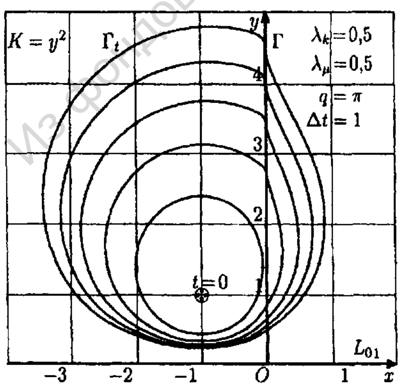

Рис. 6. Эволюция границы Γ_t в слое $K = y^2$

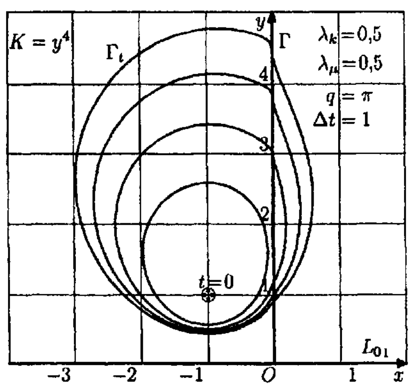

Рис. 7. Эволюция границы Γ_t в слое $K = y^4$

На рис. 6 показана эволюция границы Γ_t от нагнетательной скважины в слое $K = y^2$, а на рис. 7 в слое $K = y^4$. Видим, что нагнетаемая жидкость преимущественно движется в направлении увеличения проницаемости слоя (вдоль оси Oy). С увеличением неоднородности слоя это движение усиливается. Для всех рассмотренных случаев получены зависимости времени T_Γ от параметра λ_μ для различных значений параметра λ_k. Установлено, что с увеличением параметра λ_k время T_Γ возрастает. Рост времени T_Γ наблюдается и при увеличении неоднородности слоя (параметра s).

Также исследована эволюция границы раздела жидкостей при работе скважины в кусочно-неоднородном слое проницаемость которого $K = y^{-s}$, а толщина $H = 1$. Полученные решения сопоставлены с уже известными для неоднородного слоя результатами Д.Н. Никольского.

Сингулярная линия L_{02} является границей области фильтрации со свободной жидкостью. При численных расчётах исследовано влияние параметров λ_μ и λ_k, а также степени неоднородности слоя, на время T_L достижения границей Γ_t сингулярной линии L_{02}. При отсутствии границы сопряжения слоев получено выражение для времени T_L.

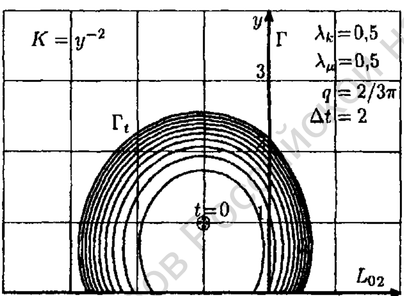

Рис. 8. Эволюция границы Γ_t в слое $K = y^{-2}$

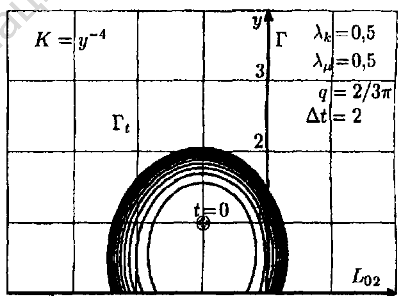

Рис. 9. Эволюция границы Γ_t в слое $K = y^{-4}$

На рис. 8 показана эволюция границы Γ_t от нагнетательной скважины в слое $K = y^{-2}$, а на рис. 9 в слое $K = y^{-4}$. Видим, что нагнетаемая жидкость преимущественно движется в направлении увеличения проницаемости слоя к сингулярной линии L_{02}. С увеличением неоднородности слоя это движение усиливается. После достижения границей Γ_t сингулярной линии нагнетаемая жидкость попадает в бассей со свободной жидкостью и мало распространяется в области фильтрации.

В работе исследована эволюция границы раздела жидкостей от нагнетательной к эксплуатационной скважине в кусочно-неоднородном слое проводимость которого $P = y^s$. Область D_2 представляет собой включение, находящееся между скважинами. Граница сопряжения слоев моделируется окружностью. Также исследовано два случая изменения проводимости слоя. Изучено влияние параметра λ_k на движение границы Γ_t. Исследовано влияние различия вязкостен жидкостей (параметра λ_μ) и расстояния до сингулярной линии на время T_z. Установлено, что с увеличением вязкости нагнетаемой жидкости (параметра λ_μ) время T_z увеличивается, если расстояние до границы L_{01} больше расстояния между скважинами. При удалении от сингулярной линии зависимость T_z от λ_μ $(\lambda_k = 0)$ стремится к зависимости, полученной для однородного грунта. Установлено, что изменении толщины слоя оказывает более сильное влияние на время T_z чем изменение проницаемости слоя. Найдены условия, при которых наличием сингулярной линии L_{01} можно пренебречь.

Практическая сходимость при численном нахождении времени T_z в слое $K = y^2$ при $\lambda_k = 0{,}5$ и $\lambda_\mu = 0{,}5$ представлена в следующей таблице.

n	100	200	300	400
T_z	1,490	1,521	1,532	1,535
η	—	2,08	0,72	0,20

$$\eta = \left(\frac{T_z^{n_2}}{T_z^{n_1}} - 1\right) \cdot 100\%$$

Здесь n — число точек разбиения подвижной границы; $T_z^{n_2}$ — время T_z, вычисленное для данного числа точек разбиения; $T_z^{n_1}$ — время T_z, вычисленное для предыдущего числа точек разбиения. Видим, что с увеличением числа точек разбиения параметр η уменьшается, то есть наблюдается практическая сходимость численного счёта.

В работе также исследована эволюция границы раздела жидкостей от нагнетательной к эксплуатационной скважине в кусочно-неоднородном слое проницаемости $K = y^{-s}$. Область D_2 представляет собой включение в виде круга, находящееся между скважинами. Исследовано влияние параметров λ_k и λ_μ, а также расстояния до сингулярной линии, на движение границы Γ_t и время T_z. Найдены условия, при которых наличием сингулярной линии L_{02} можно пренебречь.

В *заключении* излагаются основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Построены и исследованы новые двумерные математические модели эволюции границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. Проводимость неоднородных слоев моделируются степенной функцией координат. Область фильтрации могут ограничивать непроницаемые и эквипотенциальные границы.

2. Для модели «разноцветных» жидкостей в случае канонических границ сопряжения слоев и области фильтрации найдено в конечном виде поле скоростей жидкости. Нахождение положения подвижной границы сведено к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений. При работе скважины в кусочно-однородном грунте получено решение для радиального движения границы раздела жидкостей различной вязкости. Найденные решения в конечном виде используются как тестовые.
3. Когда граница сопряжения слоев и границы области фильтрации моделируются кривыми класса Ляпунова и жидкости имеют различную вязкость, то исследование этих задач сведено к решению эволюционной задачи для системы интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Эта система решена численно с помощью метода дискретных особенностей.
4. Построенные математические модели применены к конкретным задачам практики, связанными с продвижением границы раздела жидкостей от нагнетательной скважины в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. Изучено влияние неоднородности слоев, различия вязкостей и границ области фильтрации на движение границы раздела жидкостей.
5. Исследована работа системы нагнетательной и эксплуатационной скважин в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. Указаны условия, при которых вместо сложных численных расчетов можно использовать более простые модели и аналитические формулы для расчёта поля скоростей и продвижения границы раздела жидкостей.

Проведённые исследования расширяют круг решённых эволюционных задач на случай движения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта. Предложенные в работе методы решения граничных задач могут быть использованы для исследования других физических процессов, описываемых аналогичными уравнениями и граничными условиями.

Автор выражает благодарность профессорам В.Ф. Пивню, И.К. Лифанову и Ю.В. Ганделю за оказанное внимание и поддержку при подготовке диссертационной работы.

Основные результаты диссертационной работы отражены в следующих публикациях:

1. Пивень В.Ф., Никольский Д.Н., Федяев Ю.С. Комплекс программ, предназначенный для расчёта нефтяных месторождений и решения задач мониторинга окружающей среды // Тр. XI Междунар. симп. «МДОЗМФ - 2003». Харьков-Херсон, 2003. С. 209-210.
2. Пивень В.Ф., Никольский Д.Н., Федяев Ю.С, Буравлёв И.В. Исследование работы системы скважин с подвижной границей раздела жидкостей//VIII Четаевская междунар. конф. : Тез. докл. Казань: Изд-во Казан, гос. техн. ун-та, 2002. С. 278.
3. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование плоскопараллелыюго продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости методом интегро-дифференциального уравнения // Тр. X Междунар. симп. «МДОЗМФ - 2001». Херсон, 2001. С. 275-279.
4. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Математическое моделирование движения границы раздела жидкостей различной вязкости в неоднородных слоях // Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели: Тез. докл. Челябинск, 2002. С. 81.
5. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Математическое моделирование двумерного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном грунте // Вестник науки. Сб. научных работ преподавателей и аспирантов физико-математического факультета ОГУ. Вып. 2. Орёл, 2002. С. 35-39.
6. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Двумерное продвижение границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое // Тр. Междунар. школ-семинаров «МДОЗМФ». Орёл. ОГУ, 2002. С. 80-87.
7. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Эволюция двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое грунта // Тр. XI Междунар. симп. «МДОЗМФ - 2003». Харьков-Херсон, 2003. С. 211-216.
8. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование двумерного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое со степенным законом изменения его проводимости // Тр. Междунар. школ-семинаров «МДОЗМФ». Вып. 2. Орёл. ОГУ, 2003. С. 53-63.
9. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Математическое моделирование двумерной эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородных слоях грунта // Тр. Междунар. школ-семинаров «МДОЗМФ». Вып. 3. Орёл. ОГУ, 2004. С. 54-63.

10. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Исследование влияния непроницаемой границы области фильтрации на движение границы раздела жидкостей различной вязкости // Вестник науки. Сб. научных работ преподавателей, аспирантов и студентов физико-математического факультета ГОУ ВПО «ОГУ». Вып. 3. Орёл, 2004. С. 135-140.

11. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Двумерная задача сопряжения поля скоростей в кусочно-неоднородном слое грунта // Тр. Междунар. конф. по вычислительной математике МКВМ-2004. Ч. II. — Новосибирск, изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2004. С. 596-601.

12. Федяев Ю.С. Продвижение границы раздела «разноцветных» жидкостей к скважине в степенном слое // Тр. X Междунар. симп. «МДОЗМФ - 2000». Орёл, 2000. С. 445-448.

13. Федяев Ю.С. Исследование плоскопараллельного продвижения границы раздела жидкостей различной вязкости в однородной среде // Восьмая Всерос. научная конференция студентов-физиков и молодых учёных: Тез. докл. Екатеринбург, 2002. С. 90-92.

14. Федяев Ю.С. Математическое моделирование движения границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородных слоях // Междунар. конф. молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: Тез. докл. Новосибирск, 2002. С. 40.

15. Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном слое грунта // IV Всерос. конф. молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям: Тез. докл. Красноярск, 2003. С. 48.

16. Федяев Ю.С. Эволюция границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородном степенном слое // Тр. всерос. научно-практической конф. «Вклад земляков-орловцев в развитие и становление российской науки, культуры и образования». Орёл. ОГУ, 2003. С. 123-126.

17. Федяев Ю.С. Двумерное движение границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-неоднородных слоях грунта // Сб. тез. Девятой Всерос. научной конф. студентов-физиков и молодых учёных: В 2 т. Т. 1. Екатеринбург-Красноярск: Изд-во АСФ России, 2003. С. 411-413.

ФЕДЯЕВ ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 11.04.2005
Формат 60 х 84 1/16. Усл. печ. л. 1.0
Печать офсетная. Тираж 100 экз. Заказ № 9

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
Территориального органа Федеральной службы
государственной статистики по Орловской области

302001, г. Орёл, пер. Воскресенский, 24

05.12 - 05.13

914