На правах рукописи

Брагина Наталья Анатольевна

Разрешимость краевых задач для квазилинейных функционально-дифференциальных уравнений

Специальность 01.01.02

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени к.ф.-м.н.

Пермь - 2004

На правах рукописи

БРАТИНА Наталья Анатольевна

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Пермь - 2004

Работа выполнена на кафедре высшей математики Пермского государственного технического университета.

Научный руководитель:

доктор физ.-мат. наук, профессор Абдуллаев Абдула Рамазанович

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Максимов Владимир Петрович,

кандидат физ.-мат. наук, доцент Карнишин Сергей Генадьевич

Ведущая организация:

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина

Защита с о с т«24» марта 2004 д а в 15 часов на заседании диссертационного совета К 212.188.02 в Пермском государственном техническом университете по адресу:
614000, г. Пермь, Комсомольский проспект 29, ауд.206.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Пермского государственного технического университета.

Автореферат разослан «1» февраля 2004 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета:
к. ф.-м. н, доцент В.А. Соколов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертационная работа посвящена исследованию квазилинейных краевых задач для функционально дифференциальных уравнений (ФДУ). Такие задачи возникают в математических моделях механики, химии, физики, биологии, экономики и в других науках. Вопросам разрешимости краевых задач посвящены работы Азбелева Н.В., Кигурадзе И.Т., Максимова В.П., Рахматуллиной Л.Ф., Васильева Н.И., Клокова Ю.А., Слугина С.Н. и др. Систематическое применение методов функционального анализа при исследовании ФДУ началось с основополагающих работ Азбелева Н.В., Максимова В.П. и Рахматуллиной Л.Ф.

В большинстве работ, посвященных условиям разрешимости квазилинейных краевых задач предполагается, что соответствующая линейная краевая задача однозначно разрешима для всех пар правых частей. В работе) предложен оригинальный метод исследования на разрешимость краевых задач, основанный на построении априорных оценок решений специальной краевой задачи. При этом эффективность получаемых признаков разрешимости зависит от

* Азбелев Н.В., Максимов В.П. Априорные оценки решений задач Коши и разрешимость краевых задач для уравнений с запаздывающим аргументом//Дифференциальные уравнения. – 1979. Т.5, №10 – с. 1731-1747

выбора вспомогательной задачи, точнее, от нормы оператора Грина соответствующей линейной задачи. В связи с этим возникла проблема построения оператора Грина с минимальной нормой. Кроме этого, при описании реальных процессов актуальным становится вопрос о наиболее слабых ограничениях на нелинейности краевой задачи. Этот вопрос также связан с построением данного линейного уравнения такой краевой задачи, оператора Грина которой имеет минимальную норму.

Дель работы. Получение новых эффективных условий разрешимости квазилинейных краевых задач классов функционально-дифференциальных уравнений.

Методы исследования. Используются методы теории краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений, а также теории линейных операторов и нелинейного функционального анализа. Для исследования на разрешимость краевых задач в работе разработан вспомогательных аппарат, связанный с коэффициентом сюръективности.

Научная новизна. В работе получены оценки коэффициента сюръективности для некоторых линейных функционально дифференциальных операторов и краевых задач. Разработана методика построения оператора Грина с минимальной нормой для случая гильбертового- пространства. Получены новые условия разрешимости для некоторых классов квазилинейных краевых задач, основанные на применении коэффициента сюръективности. Получены признаки разрешимости краевых задач в условиях приводимости (параметризуемости множества решений).

Теоритическая и практическая ценность работы. Разработанная методика может быть применена для изучения новых классов краевых задач для ФДУ. Результаты работы могут применяться при исследовании конкретных краевых задач, возникающих в математических моделях реальных процессов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на городском семинаре по функционально-дифференциальным уравнениям профессора Азбелева Н.В., на семинаре профессора Максимова В.П., на семинаре кафедры математического анализа Пермского государственного университета, на научно-технических конференциях ГОТУ (1998-2002 гг.), на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2000), на Областной научной конференции молодых ученых и аспирантов «Молодежная наука Прикамья». (Пермь, 2000.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в восьми работах, список которых приведеп в конце автореферата.

<u>Структура и объем работы.</u> Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа изложена на 101 странице. Библиографический список содержит 68 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности темы, приводится описание методики исследования и краткое содержание диссертационной работы.

Первая глава носит вспомогательный характер. В первом параграфе рассмотрены основные определения и утверждения о линейных операторах в банаховых пространствах, требуемые для изложения.

В параграфе 1.2. приведены сведения, связанные с абстрактной линейной краевой задачей

$$\begin{cases} Lx = y, \\ lx = \alpha, \end{cases}$$ O)

где $L: X \to Y$ - линейный ограниченный оператор и $l: X \to R^m$ линейный ограниченный вектор-функционал $(X,Y$ - банаховы пространства пространства, R^m - m -мерное евклидово пространство.

В параграфе 1.3 рассмотрен оператор Чезаро:

$$(Ax)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(s)ds,\ A: L_p[0,1] \to L_p[0,1],\ 1 < p < \infty,$$

где L_p - банахово пространство суммируемых в р-й степени функций.

Здесь приведены утверждения о норме оператора A и представление резольвенты. Кроме того, дано описание точечного, остаточного и непрерывного спектров оператора Чезаро. Во второй части этого параграфа получепы аналогичные утверждения для обобщенного оператора Чезаро вида:

$$(Ax)(t)=\frac{1}{t^{\alpha}}\int_{t_0}^{t}s^{\beta}x(s)ds\,,x(t)\in L_p[t_0,1],$$

где $\alpha,\beta\geq 0$ —константы.

В параграфе 1.4 рассмотрены свойства коэффициента сюръективности. Для линейного ограниченного оператора $L:X\to Y$ коэффициентом сюръективности называется неотрицательное число $q(L)$, определяемое равенством

$$q(L)=\inf_{z\neq 0}\frac{\|L^*z\|}{\|z\|},$$

Где $L^*:Y^*\to X^*$ оператор сопряженный с L.

В параграфах 1.5-1.6 получены формулы для вычисления и оценки коэффициента сюръективности некоторых линейных операторов и линейных краевых задач. Приведем одно из этих утверждений.

Теорема 1.5.6. Для коэффициента сюръективности справедлива оценка

$$\frac{1}{q(L)} \le \|K_p\|, \qquad (2)$$

где оператор $K_p : Y \to X$ - правый обратный для L.

В заключительном параграфе первой главы приведены некоторые теоремы о неподвижных точках в удобной для нас формулировке.

Глава 2 посвящена вычислению коэффициента сюръективности конкретных операторов и краевых задач. При этом используются утверждения, полученные в параграфах 1.4-1.6.

В первом параграфе этой главы получена оценка коэффициента сюръективности оператора суммы единичного и обобщенного оператора Чезаро: $(I + A): L_2[0,T] \to L_2[0,T]$

$$(Lz)(t) = ((I + A)z)(t) = z(t) + \frac{\gamma}{t^{\alpha}}\int_0^t s^{\alpha-1} z(s)ds, \qquad (3)$$

где $\gamma \in R^1$ и $\alpha \ge 0$.

Лемма 2.1.2. Для любого фиксированного T>0 верны соотношения:

1) если $\gamma > 0$ или $\gamma < 1 - 2\alpha$, то $q(L) \ge 1$;

2) если $1 - 2\alpha < \gamma < 0$, то $q(L) \ge \left|1 + \frac{2\gamma}{2\alpha - 1}\right|$.

Отметим, что в случае 2) оператор оказывается сюръективным, но не обратимым.

Во втором параграфе рассмотрена задача об операторе Грина с минимальной нормой абстрактной краевой задачи (1).

Пусть задача (1) однозначно разрешима для всех пар правых частей $y \in Y$, $\alpha \in R^m$. Оператор $G: Y \to X$, ставящий в соответствие каждому $y \in Y$ единственное решение краевой задачи $Lx = y, lx = 0$ называется оператором Грина задачи (1).

Впервые вопрос об операторе Грина с минимальной нормой рассматривался в работе*) в связи с проблемой параметризуемости множества решений квазилинейного уравнения. В этой работе норма оператора Грина заменена оценкой сверху. Обозначим через $v(G_l)$ такой функционал, что $\|G_l\|_{L_p^n \to D_p^n} \le v(G_l)$ $\forall l$ и запишем экстремальную задачу:

$$\inf\left\{v(G_l): lX = E, lx \equiv \Psi_l x(a) + \int_a^b \Phi_l(s)\dot{x}(s)ds\right\},$$

где Ψ_l - постоянная n x n-матрица, столбцы их n-матрицы $\Phi_l(\cdot)$ принадлежат пространству L_p^n. В работе" были сформулированы

* Максимов В.П. К вопросу о параметризации множества решений функционально-дифференциального уравнения// Функционально-дифференц. уравнения: Межвуз. сб. науч. тр. / Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1988. с. 14-20.

*Абдуллаев А.Р. Об операторе Грина с минимальной нормой//Краевые задачи. Пермь, 1991. С. 3-6.

условия, при которых минимальную норму имеет оператор Грина задачи Коши (оператор Копта).

Основное содержание параграфа 2 главы 2 составляет следующее утверждение:

Теорема 2.2.1. Пусть $U=\{x_1,...,x_n\}$ - ортонормированный базис $\ker L$ и вектор-функционал l определен равенством $lx=col\{l_1x, l_2x,..l_nx\}$, $l_ix=(x_i,x)$. Тогда оператор Грина краевой задачи (3) имеет минимальную норму.

Таким образом, в соответствии с утверждением теоремы 2.2.1. для построения требуемой краевой задачи для данного уравнения достаточно описание базиса однородного уравнения. В этом смысле это утверждение достаточно эффективно. Кроме того, теорема 2.2.1 дает принципиальную возможность вычисления минимальной нормы оператора Грина без построения последнего: для этого достаточно найти $(q(L))^{-1}$.

В следующем параграфе рассмотрены примеры построения оператора Грина с минимальной нормой.

Первый параграф третий главы посвящен получению условий разрешимости задачи Коши для квазилинейного сингулярного дифференциального уравнения вида

$$\begin{cases} t^{-\beta}\left(t^{\alpha}x(t)\right)' + ax(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Одновременно с задачей (4) рассматривается линейная краевая задача

$$\begin{cases} t^{-\beta}\left(t^{\alpha}x(t)\right)' + ax(t) = f(t), \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Решение задачи (4) или (5) ищется в $x \in D_2[0,1]$. Используя результаты параграфа 1.3, получено следующее утверждение.

Теорема 3.1.1. Если $a > 0$ или $\alpha + \beta + 2a < 0$, то задача Коши (5) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2$, причем

$$x(t) = \frac{1}{t^{\alpha}}\int_0^t s^{\beta}\left(\frac{f(s)}{s} - s^{a-1}\int_0^1 \tau^{a} f(\tau)d\tau\right)ds.$$

Если $a < 0$ или $\alpha + \beta + 2a > 0$, то задача (0.7) имеет хотя бы одно решение.

С помощью этой вспомогательной теоремы доказаны теоремы о существовании и единственности задачи вида (4). Они сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 3.1.2. Пусть выполнены условия: 1) $a > 0$ или $\alpha + \beta + 2a < 0$, 2) функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом k_f по второму аргументу, 3) $\left\|\left(\frac{1}{a}I + A\right)^{-1}\right\| \cdot k_f < 1.$ Тогда задача (4) имеет единственное решение.

Теорема 3.1.3. Пусть $a < 0$ и $\alpha + \beta + 2a > 0$, функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию

$$|f(t,u)| \le b + c|u|^{\delta}, \quad t \in [0,1), \quad u \in R^1, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда существует хотя бы одно решение задачи (4).

Отдельно рассмотрен случай задачи (4), когда $\alpha = 1, \ \beta = 0.$ В этом случае задача имеет вид:

$$\begin{cases} (tx(t))' + ax(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

и эквивалентна интегральному уравнению с оператором Чезаро.

Теорема 3.1.3. Пусть выполнено условие $a > 0,$ функция $f(t,u)$ по второму аргументу удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом k_f и выполнено неравенство $k_f < \frac{1}{a}.$ Тогда задача (6) имеет единственное решение.

В параграфе 3.2 рассматривается случай абстрактного квазилинейного функционально-дифференциального уравнения

$$Lx = Fx \qquad (7)$$

в предположении параметризуемости множества всех решений (приводимости). Получены достаточные условия параметризуемости уравнения (7). Основным утверждением этого параграфа является:

Теорема 3.2.1. Пусть выполнены условия:

1) оператор $F : X \to Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой *к;*

2) на ядро оператора *L* существует проектор единичной нормы;

3) выполняется неравенство $k < q(L)$.

Тогда уравнение (3.2.1) допускает конечную параметризацию, то есть существует такой непрерывный оператор $\Gamma : R^m \to M$, что все решения уравнения (3.2.1) имеют представление $\Gamma\alpha = \alpha + \Gamma_0\alpha$, причем Γ_0 удовлетворяет условию Липшица с константой $k_{\Gamma_0} \le \frac{\|X\|\|G\|k}{1-\|G\|k}$, где *X* - фундаментальный вектор решений однородного уравнения $Lx = 0$.

В параграфе 3.3. получены утверждения о разрешимости квазилинейной краевой задачи вида

$$\begin{cases} Lx = F_1x + F_2x \\ lx = \varphi x \end{cases} \tag{8}$$

где $L : X \to Y$ - линейный ограниченный оператор, $l : X \to R^m$ - линейный ограниченный вектор-функционал, оператор $F_1 : X \to Y$ -

и

удовлетворяет условию Липшица, оператор $F_2 : X \to Y$ - вполне непрерывный. И доказаны теоремы о разрешимости задачи (8).

Результаты диссертационной работы, изложены в публикациях:

1. Брагина Н.А. О спектре одного сингулярного интегрального уравнения// Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. 1996, № 3. стр 16-18.
2. Абдуллаев А.Р., Брагина Н.А. О коэффициенте сюръективности линейных краевых задач// Перм. политехи, ин-т. Пермь, 1998. 7 с. Деп в ВИНИТИ 7.12.98, № 3569-В98.
3. Брагина Н.А. О параметризуемости функционально-дифференциальных уравнений// Перм. политехи, ин-т. Пермь, 2000. 8 с. Деп в ВИНИТИ 14.07.00, № 1963 - В 00.
4. Брагина Н.А. Об одном методе оценки коэффициента сюръективности// Научно - техническая конференция ПГТУ. «Проблемы прикладной математики и механики». - Пермь. - 1998. - С. 11.
5. Брагина Н.А. Об условиях параметризуемости функционально дифференциальных уравнений// Воронежская зимняя математическая школа. «Современные методы теории функций и смешанные проблемы». Воронеж. - 2000. - С. 54.

6. Брагина Н.А. О вычислении и оценках коэффициента сюръективности// Областная научная конференция молодых ученых и аспирантов. «Молодежная наука Прикамья». - 2000. - Пермь. - С. 117.

7. Абдуллаев А.Р., Брагина Н.А. Операторы Грина с минимальной нормой// Известия вузов. Математика. - 2003. - № 4.- С. 3-7.

8. Брагина Н.А. Задача Коши для квазилинейного сингулярного дифференциального уравнения первого порядка// Известия научно-образовательного центра "Математика" Выпуск 1. Пермь. ПГТУ. - 2003.-С. 10-16.

Сдано в печать 12.01.04. Формат 60x84/16. Объем 1 п. л.

Тираж 100. Заказ 1000. Ротапринт ПГТУ.